数学序論問題解説 #10

河野

演習問題 4.4　この命題を証明せよ。

前に講義でも示しているが，一応書いておく。
最初に f が単調増加の場合を考える。f は単調増加なので

$$\forall x_1, x_2 \in I \ x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

が成立している。f が単射であるとは「$\forall x_1, x_2 \in I \ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$」が成立することを示せばよい。$x_1, x_2 \in I$ に対して $x_1 \neq x_2$ が成立しているとする。このとき「$x_1 < x_2$ または $x_2 < x_1$」が成立している。$x_1 < x_2$ のとき単調増加より $f(x_1) < f(x_2)$ が成立し，$x_2 < x_1$ のとき単調増加より $f(x_2) < f(x_1)$ が成立する。いずれの場合も $f(x_1) \neq f(x_2)$ が成立するので，f は単射である。

次に f が単調減少の場合を考える。f は単調減少なので

$$\forall x_1, x_2 \in I \ x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

が成立している。f が単射であるとは「$\forall x_1, x_2 \in I \ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$」が成立することを示せばよい。$x_1, x_2 \in I$ に対して $x_1 \neq x_2$ が成立しているとする。このとき「$x_1 < x_2$ または $x_2 < x_1$」が成立している。$x_1 < x_2$ のとき単調減少より $f(x_1) > f(x_2)$ が成立し，$x_2 < x_1$ のとき単調減少より $f(x_2) > f(x_1)$ が成立する。いずれの場合も $f(x_1) \neq f(x_2)$ が成立するので，f は単射である。

演習問題 4.5　命題 4.8 を証明せよ。ただし自然数に対し指数法則が成立することは用いてよい。

m に関しては，自然数の場合，0 の場合，負の整数の場合の 3 通りの場合があり，n に関しても 3 通りの場合があるので，9 通りの場合がある。場合分けをして考える。ただしまとめて考えることができるときはまとめて考える。

(1)　最初に m, n が自然数の場合を考える。(問題文では「自然数に対し指数法則が成立することは用いてよい」とあるので，次は必要ないが，自然数に対する証明も与えておこう。) このときは

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{ 個}}$$

なので

$$\begin{aligned} a^m a^n &= \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\text{ 個}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{ 個}} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m+n\text{ 個}} \\ &= a^{m+n} \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned}\left(a^m\right)^n &= \underbrace{a^m \cdot a^m \cdots a^m}_{n\text{ 個}} \\ &= \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\text{ 個}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\text{ 個}} \cdots \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\text{ 個}}}_{n\text{ 個}} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{mn\text{ 個}} = a^{mn}\end{aligned}$$

となる。よって $m, n \in \mathbb{N}$ の場合指数法則は成立する。

講義で「『$\cdots$』を用いるのは厳密ではない」と言ったのを憶えている人もいるかもしれない。そのような人のために数学的帰納法を用いた証明も与えておく。

最初に自然数に対する巾乗の定義をきちんと書いておく。「$a^1 = a$」と定義し,「自然数 k に対し a^k が定義されているとき,$a^{k+1} = a^k \cdot a$」と定義するこのような定義を帰納的な定義と言う。m を自然数とする。命題「$n \in \mathbb{N}$ に対し $a^m a^n = a^{m+n}$ が成立する」を $P(n)$ と書く。$P(1)$ は「$a^m \cdot a^1 = a^{m+1}$」であり,これは定義そのものなので成立している。

$n = k$ のとき成立を仮定する。即ち「$a^m a^k = a^{m+k}$」の成立を仮定する。このとき

$$a^m a^{k+1} = a^m \left(a^k a\right) = \left(a^m a^k\right) a = a^{m+k} a = a^{m+k+1}$$

となり $P(k+1)$ も成立する。

命題 $Q(n)$ を「$(a^m)^n = a^{mn}$」とする。

$$(a^m)^1 = a^m = a^{m \cdot 1}$$

なので $Q(1)$ は成立する。$Q(k)$ の成立を仮定する。このとき

$$(a^m)^{k+1} = (a^m)^k \cdot a^m = \left(a^{mk}\right) a^m = a^{mk+m} = a^{m(k+1)}$$

となるので $Q(k+1)$ が成立する。どちらも数学的帰納法により証明された。しかし,「$\cdots$」を全く使わないもの読んでてしんどいと思われるので,後では使用することにしよう。

(2) 次に一方が 0 の場合を考える。$n = 0$ の場合,$a^n = a^0 = 1$ であり,$\left(a^m\right)^n = \left(a^m\right)^0 = 1$ である。よって

$$a^m a^n = a^m a^0 = a^m \cdot 1 = a^m = a^{m+0} = a^{m+n}$$

$$\left(a^m\right)^n = \left(a^m\right)^0 = 1 = a^0 = a^{m \cdot 0} = a^{mn}$$

となる。$m = 0$ のとき $a^m = a^0 = 1$ である。ここで任意の $s \in \mathbb{Z}$ に対し $1^s = 1$ が成立することを注意しておく。$s \geqq 0$ のときは定義から成立するし,$s < 0$ のときは $s = -t$ $(t \in \mathbb{N})$ とおくと

$$1^s = 1^{-t} = \left(\frac{1}{1}\right)^t = 1^t = 1$$

より成立する。よって

$$a^m a^n = a^0 a^n = 1 \cdot a^n = a^n = a^{0+n} = a^{m+n}$$

$$\left(a^m\right)^n = \left(a^0\right)^n = 1^n = 1 = a^0 = a^{0 \cdot n} = a^{mn}$$

となり，この場合も成立している。

(3)　$m \in \mathbb{N}$ かつ n が負の整数の場合，$k = -n$ とおくと k は自然数であり，$a^n = a^{-k} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^k$ となっている。

$$a^m a^n = a^m \left(\frac{1}{a}\right)^k = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\text{ 個}} \cdot \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdots \frac{1}{a}}_{k\text{ 個}} \tag{3}$$

分母の a と分子の a が打ち消しあうが，ここでさらに 3 つの場合に分ける; (a) $m > k$, (b) $m = k$, (c) $m < k$ 。(a) の場合 (3) は $\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m-k\text{ 個}}$ となる。よってこの場合

$$a^m a^n = a^{m-k} = a^{m+n}$$

となる。(b) の場合 (3) はすべてお互いに打ち消しあい 1 になる。よってこの場合

$$a^m a^n = 1 = a^0 = a^{m-k} = a^{m+n}$$

となる。(c) の場合 (3) は $\underbrace{\dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{a} \cdots \dfrac{1}{a}}_{k-m\text{ 個}}$ となる。よってこの場合

$$a^m a^n = \left(\frac{1}{a}\right)^{k-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-n-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-(m+n)} = a^{m+n}$$

となる。また

$$\begin{aligned}(a^m)^n = (a^m)^{-k} &= \underbrace{\frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^m} \cdots \frac{1}{a^m}}_{k\text{ 個}} \\ &= \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdots \frac{1}{a}}_{mk\text{ 個}} \\ &= a^{-mk} = a^{mn}\end{aligned}$$

となる。

(4)　これで 9 つの場合分けのうち 7 つが終わった。先はまだあるように見えるが，実は証明はほとんど終わっていると考えることができる。そのために次の式を成立を示す。

$$a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m \quad (m \in \mathbb{Z})$$

この式は $m \in \mathbb{N}$ のときは定義なので成立している。それ以外の場合の成立を言えばよい。$m = 0$ の場合

$$a^{-0} = a^0 = 1 = \left(\frac{1}{a}\right)^0$$

なので成立している。$m < 0$ のとき $m = -k$ とおくと $k \in \mathbb{N}$ であり，

$$\left(\frac{1}{a}\right)^m = \left(\frac{1}{a}\right)^{-k} = \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)}\right)^k = a^k = a^{-(-k)} = a^{-m}$$

となり成立している。

今証明した式を用いると (a) $m<0$ かつ $n>0$ ，(b) $m<0$ かつ $n<0$ の場合証明でき，全体の証明が終わる。(a) の場合 $a^m=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-m}$， $a^n=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-n}$ であり $-m>0$ かつ $-n<0$ なので 3 番目の場合において a を $\dfrac{1}{a}$ に変えた式を考えると

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-m}\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^{(-m)+(-n)}$$

が成立している。よって

$$a^m a^n=\left(\frac{1}{a}\right)^{-m}\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^{(-m)+(-n)}=\left(\frac{1}{a}\right)^{-(m+n)}=a^{m+n}$$

となる。ここで $m>0$ の場合は $\left(a^m\right)^n=a^{mn}$ の成立が示されていることに注意すると，

$$\left(a^m\right)^n=\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{-m}\right)^n=\left(\frac{1}{a}\right)^{-mn}=a^{mn}$$

となり，この場合の成立が分かる。

(b) の場合 $a^m=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-m}$， $a^n=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-n}$ であり $-m>0$ かつ $-n>0$ なので 1 番目の場合において a を $\dfrac{1}{a}$ に変えた式を考えると

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-m}\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^{(-m)+(-n)}$$

が成立している。よって

$$a^m a^n==\left(\frac{1}{a}\right)^{-m}\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^{(-m)+(-n)}=\left(\frac{1}{a}\right)^{-(m+n)}=a^{m+n}$$

となる。$\left(a^m\right)^n=a^{mn}$ の成立は前と同様にできる。

演習問題 *4.6　a は正の実数とする。

(1)　n を自然数とする。$b^n=a$ を満たすような正の実数 b はただ一つしかないことを証明せよ。

(2)　$p,\,q$ が 0 ではない整数の時，$\left(a^{1/q}\right)^p=\left(a^p\right)^{1/q}$ を示せ.

(3)　$p,\,q,\,s,\,t$ が 0 ではない整数であって $p/q=s/t$ となっている時，$\left(a^{1/q}\right)^p=\left(a^{1/t}\right)^s$ となることを示せ。

(4)　任意の有理数 $u,\,v$ に対して，次が成り立つことを示せ。

$$a^{u+v}=a^u a^v,\qquad \left(a^u\right)^v=a^{uv}$$

(5)　任意の有理数 u に対して $a^u>0$ を示せ。

(6)　$1<a$ の時，有理数 $u,\,v$ が $u<v$ ならば $a^u<a^v$ を示せ。

(7)　$0<a<1$ の時，有理数 $u,\,v$ が $u<v$ ならば $a^u>a^v$ を示せ。

(1) $f:[\,0,\infty\,)\to\mathbb{R}$ を $f(x)=x^n$ で定義すると f は単調増加であり，よって単射である。$b_1^n=a=b_2^n$ となる正の実数 b_1,b_2 が存在したとすると，$f(b_1)=a=f(b_2)$ が成立している。f は単射なので $b_1=b_2$ となる。

(2) (1) の結果より自然数 n に対し「$b^n=a \iff b=a^{\frac{1}{n}}$」が分かる。ここで最初に 0 でない整数 p に対し「$b^p=a \iff b=a^{\frac{1}{p}}$」の成立を示しておく。$p>0$ の場合は (1) で示したので $p<0$ とする。$p=-k$ とおくと k は自然数である。$b^p=b^{-k}=\left(\dfrac{1}{b}\right)^k$ なので (1) より「$b^p=a \iff \left(\dfrac{1}{b}\right)^k=a \iff \dfrac{1}{b}=a^{\frac{1}{k}}$」が成立するが $b=\dfrac{1}{a^{\frac{1}{k}}}=a^{-\frac{1}{k}}=a^{\frac{1}{-k}}=a^{\frac{1}{n}}$ となり成立する。

$b=a^{\frac{1}{q}}$ とおくと $a=b^q$ が成立している。

$$a^p=\left(b^q\right)^p=b^{qp}=b^{pq}=\left(b^p\right)^q$$

より

$$\left(a^p\right)^{\frac{1}{q}}=b^p=\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

が成立している。

(3) $b=a^{\frac{1}{q}}$，$c=a^{\frac{1}{t}}$ とおくと $a=b^q$，$a=c^t$ が成立している。

$$a^p=\left(b^q\right)^p=b^{qp}=b^{pq}=\left(b^p\right)^q$$

であり，$tp=sq$ より

$$a^p=\left(c^t\right)^p=c^{tp}=c^{sq}=\left(c^s\right)^q$$

が成立している。$\left(b^p\right)^q=\left(c^s\right)^q$ なので (1) より $b^p=c^s$ が成立する。これを a を用いて書き直せば $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p=\left(a^{\frac{1}{t}}\right)^s$ が得られる。

(4) $u=0$ または $v=0$ の場合は整数のとき示したのと同様に示すことができる。よって u,v は 0 でない有理数とする。(3) は有理数に対し，その分数の表示にかかわらず指数関数が決まることを意味している。即ち $u=\dfrac{p}{q}$ と表示しようと，$u=\dfrac{s}{t}$ と表示しようと，その表示によらない値として $a^u=a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{s}{t}}$ が決まることを意味している。よって最初の等式を証明するために分数表示はすでに通分されているとする；即ち $u=\dfrac{p_1}{q}$，$v=\dfrac{p_2}{q}$ (p_1,p_2,q は 0 でない整数) とする。このとき整数が指数の場合の指数法則は示されている。よって

$$\begin{aligned}a^ua^v&=a^{\frac{p_1}{q}}a^{\frac{p_2}{q}}=\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p_1}\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p_2}\\&=\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p_1+p_2}=a^{\frac{p_1+p_2}{q}}\\&=a^{\frac{p_1}{q}+\frac{p_2}{q}}=a^{u+v}\end{aligned}$$

となる。

次の式を示すために最初に

$$\left(a^{\frac{1}{q_1}}\right)^{\frac{1}{q_2}}=a^{\frac{1}{q_1q_2}}$$

を示す。ただし q_1, q_2 は 0 でない整数とする。$b = \left(a^{\frac{1}{q_1}}\right)^{\frac{1}{q_2}}$ とおくと $b^{q_2} = a^{\frac{1}{q_1}}$ である。さらに q_1 乗すると

$$a = (b^{q_2})^{q_1} = b^{q_2 q_1} = b^{q_1 q_2}$$

となるので (2) の最初に注意より $b = a^{\frac{1}{q_1 q_2}}$ となる。

次に

$$\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(a^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

を示す。$b = a^{\frac{1}{q}}$ とおくと $a = b^q$ である。これを p 乗すると

$$a^p = \left(b^q\right)^p = b^{qp} = b^{pq} = \left(b^p\right)^q$$

となるので

$$\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = b^p = \left(a^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

となる。

$u = \dfrac{p}{q},\ v = \dfrac{s}{t}$ とおくと

$$\begin{aligned}(a^u)^v &= \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{s}{t}} = \left(\left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p\right)^{\frac{1}{t}}\right)^s \\ &= \left(\left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{t}}\right)^p\right)^s = \left(a^{\frac{1}{qt}}\right)^{ps} \\ &= a^{\frac{ps}{qt}} = a^{uv}\end{aligned}$$

が得られる。

(5)　有理数 u は $u = \dfrac{p}{q}$ と分数表示できる。ここで q は正の整数，p は整数である。$a > 0$ は常に仮定されているので $a^{\frac{1}{q}} > 0$ である。これを p 乗した $a^u = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$ も正である。

(6)　最初に正の整数 q に対し $a^{\frac{1}{q}} > 1$ を背理法で示す。$a^{\frac{1}{q}} > 0$ なので結論を否定すると

$$0 < a^{\frac{1}{q}} \leqq 1$$

が成立している。q は正の整数なので q 乗しても不等号の向きは変わらない。よって

$$0 < \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q \leqq 1^q = 1$$

となるのが $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q = a$ なので $a \leqq 1$ となり矛盾。

次に正の有理数 $u = \dfrac{p}{q}$ に対し $a^u > 1$ を示す。ここで p, q は正の整数とする。$a^{\frac{1}{q}} > 1$ なので $a^u = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p > 1$ となり成立する。

$u < v$ とすると $v - u > 0$ なので今示したことより $a^{v-u} > 1$ となるが $a^{v-u} = a^u a^{-v}$ であり両辺に a^u をかけると $a^v > a^u$ が得られる。

(7)　$0 < a < 1$ のとき $b = \dfrac{1}{a}$ とおくと $b > 1$ が成立している。$u < v$ のとき (6) より $b^u < b^v$ が，即ち

$$\left(\frac{1}{a}\right)^u < \left(\frac{1}{a}\right)^v$$

が成立している。両辺に a^{v+u} をかけると

$$a^v < a^u$$

が得られる。