数学序論問題解説 #11

河野

演習問題 4.7

(1) a, b, c を正の実数とする。$a^b = c^{b\log_c a}$ を示せ。
(2) a, b, c を正の実数とする。$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ を示せ。

対数関数においては次が基本的である。

$$y = \log_a x \iff x = a^y$$

(1) $X = c^{b\log_c a}$ とき，c を底とする対数をとると

$$\log_c X = \log_c c^{b\log_c a} = b\log_c a \log_c c = b\log_c a = \log_c a^b$$

が成立する。$Y = a^b$ とおき，c を底とする対数をとると

$$\log_c Y = \log_c a^b$$

が成立する。よって $\log_c X = \log_c Y$ が成立している。log は単射なので $\log_c X = \log_c Y$ なら $X = Y$ が成立している。よって $a^b = c^{b\log_c a}$ が成立する。
(2) $X = a^{\log_c b}$ とおくと $\log_c X = \log_c a^{\log_c b} = \log_c b \log_c a$ である。$Y = b^{\log_c a}$ とおくと $\log_c Y = \log_c b^{\log_c a} = \log_c a \log_c b$ である。よって $\log_c X = \log_c Y$ が成立するが，log は単射なので $X = Y$ が成立する。

演習問題 4.8

(1) 次の値を求めよ。

$$\mathrm{Arcsin}\,\frac{1}{2},\quad \mathrm{Arccos}\,\frac{1}{2},\quad \mathrm{Arctan}\,1,\quad \mathrm{Arcsin}\,\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \mathrm{Arctan}\,\sqrt{3},\quad \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2) 次の式を証明せよ。

$$\mathrm{Arcsin}\,\frac{3}{5} + \mathrm{Arcsin}\,\frac{5}{13} = \mathrm{Arcsin}\,\frac{56}{65}$$

(3) 方程式 $\mathrm{Arccos}\,\frac{1}{\sqrt{5}} = \mathrm{Arctan}\,x$ をみたす x を求めよ。
(4) $-1 \leqq x \leqq 1$ の時，$\mathrm{Arcsin}\,x + \mathrm{Arccos}\,x = \frac{\pi}{2}$ を示せ。
(5) $x > 0$ の時，$\mathrm{Arctan}\,x + \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ を示せ。
(6) $\mathrm{Arctan}\,x = \mathrm{Arcsin}\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ を示せ。

逆三角関数においては次が基本的である。

$$y = \mathrm{Arcsin}\, x \iff x = \sin y \quad (-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2})$$
$$y = \mathrm{Arccos}\, x \iff x = \cos y \quad (0 \leqq y \leqq \pi)$$
$$y = \mathrm{Arctan}\, x \iff x = \tan y \quad (-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$$

(1) $x = \mathrm{Arcsin}\,\frac{1}{2}$ とおくと

$$\frac{1}{2} = \sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

なので $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ で $\sin x = \frac{1}{2}$ となる x を求めると $x = \frac{\pi}{6}$ である。よって $\mathrm{Arcsin}\,\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ となる。

$x = \mathrm{Arccos}\,\frac{1}{2}$ とおくと

$$\frac{1}{2} = \cos x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

なので $x = \frac{\pi}{3}$，即ち $\mathrm{Arccos}\,\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ となる。

$x = \mathrm{Arctan}\,1$ とおくと

$$1 = \tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

なので $x = \frac{\pi}{4}$，即ち $\mathrm{Arctan}\,1 = \frac{\pi}{4}$ となる。

$x = \mathrm{Arcsin}\,\frac{1}{\sqrt{2}}$ とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

なので $x = \frac{\pi}{4}$，即ち $\mathrm{Arcsin}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$ となる。

$x = \mathrm{Arctan}\,\sqrt{3}$ とおくと

$$\sqrt{3} = \tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

なので $x = \frac{\pi}{3}$，即ち $\mathrm{Arctan}\,\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ となる。

$x = \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{3}}$ とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

なので $x = \frac{\pi}{6}$，即ち $\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ となる。

(2) $\alpha = \mathrm{Arcsin}\,\frac{3}{5}$ とおくと

$$\sin\alpha = \frac{3}{5} \quad (-\frac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2})$$

が成立している。$\beta = \mathrm{Arcsin}\,\dfrac{5}{13}$ とおくと

$$\sin\beta = \frac{5}{13} \qquad (-\frac{\pi}{2} \leqq \beta \leqq \frac{\pi}{2})$$

が成立している。ここで $\dfrac{3}{5}, \dfrac{5}{13}$ は共に正であり，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より小さいので

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}, \qquad 0 < \beta < \frac{\pi}{4}$$

が成立していることを注意しておく。このとき $\cos\alpha, \cos\beta$ ともに正なので

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$
$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$$

が成立する。従って

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{3}{5}\,\frac{12}{13} + \frac{4}{5}\,\frac{5}{13} = \frac{56}{65}$$

が成立する。最初の注意より $0 < \alpha+\beta < \dfrac{\pi}{2}$ なので $\alpha+\beta = \mathrm{Arcsin}\,\dfrac{56}{65}$ 即ち

$$\mathrm{Arcsin}\,\frac{3}{5} + \mathrm{Arcsin}\,\frac{5}{13} = \mathrm{Arcsin}\,\frac{56}{65}$$

が成立する。

(3) $y = \mathrm{Arccos}\,\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ とおくと

$$\cos y = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad (0 \leqq y \leqq \pi)$$

である。また $y = \mathrm{Arctan}\,x$ より

$$\tan y = x$$

なので,

$$\sin y = \tan y \cos y = \frac{x}{\sqrt{5}}$$

となる。$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ に代入すると $1 = \dfrac{1}{5} + \dfrac{x^2}{5}$ より $x^2 = 4$ を得る。

$$\mathrm{Arctan}\,x = \mathrm{Arccos}\,\frac{1}{\sqrt{5}} > 0$$

より $x > 0$ なので $x = 2$ が解である。

(4) $u = \mathrm{Arcsin}\,x$ とおくと $x = \sin u$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq u \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ であり，$v = \mathrm{Arccos}\,x$ とおくと $x = \cos v$ $(0 \leqq v \leqq \pi)$ である。演習問題 5.3 (1) を用いると

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \sin\left(-\left(v - \frac{\pi}{2}\right)\right) = -\sin\left(v - \frac{\pi}{2}\right) = -\big(-\cos v\big) = \cos v$$

の成立が示される。$0 \leqq v \leqq \pi$ のとき $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \dfrac{\pi}{2} - v \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であり，

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cos v = x = \sin u$$

なので $\dfrac{\pi}{2} - v = u$ となり，$u + v = \dfrac{\pi}{2}$ となる。

(5) $u = \operatorname{Arctan} x$ とおくと $x = \tan u$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}\right)$ である。$x > 0$ より $0 < u < \dfrac{\pi}{2}$ となっている。$v = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x}$ とおくと $\dfrac{1}{x} = \tan v$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < v < \dfrac{\pi}{2}\right)$ である。$\dfrac{1}{x} > 0$ より $0 < v < \dfrac{\pi}{2}$ となっている。演習問題 5.3 (1) を用いると

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cos\left(-\left(v - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(v - \frac{\pi}{2}\right) = \sin v$$

の成立が示される。これより

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - v\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - v\right)} = \frac{\cos v}{\sin v} = \frac{1}{\tan v} = x = \tan u$$

が成立する。u, v ともに $0 < u < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < v < \dfrac{\pi}{2}$ なので $0 < \dfrac{\pi}{2} - v < \dfrac{\pi}{2}$ となり，$\dfrac{\pi}{2} - v = u$ が成立する。

(6) $u = \operatorname{Arctan} x$ とおくと $x = \tan u$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}\right)$ であり，$v = \operatorname{Arcsin}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ とおくと $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sin v$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq v \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ となる。

$$1 + x^2 = 1 + \tan^2 u = 1 + \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} = \frac{\cos^2 u}{\cos^2 u} + \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u}$$

であるが，$-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos u > 0$ なので $\sqrt{1+x^2} = \dfrac{1}{\cos u}$ となる。

$$\sin v = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \cos u \tan u = \sin u$$

であり，$-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq v \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $u = v$ となる。