数学序論問題解説 #13

河野

演習問題 5.13　$x=a$ で微分可能な関数は $x=a$ において連続であることを証明せよ。

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとすると，

$$\varepsilon(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)$$

とおくとき $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ が成立している。このとき

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\varepsilon(h)h$$

なので $x=a+h$ とおくと

$$\lim_{x\to a}f(x) = \lim_{h\to 0}f(a+h)=\lim_{h\to 0}\{f(a)+f'(a)h+\varepsilon(h)h\}=f(a)$$

となるので $f(x)$ は $x=a$ で連続である。

演習問題 5.14　定義に基づいて次の関数の導関数を求めよ。

(1) $f(x)=x$　　(2) $f(x)=x^3$

(3) $f(x)=x^2+x+1$　　(4) $f(x)=a$

(5) $f(x)=x^4$　　(6) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

(1)

$$(x)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

(2)

$$\begin{aligned}(x^3)' &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}=\lim_{h\to 0}\left\{3x^2+3xh+h^2\right\}=3x^2\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(x^2+x+1)' &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+(x+h)+1-(x^2+x+1)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h+1)}{h}=\lim_{h\to 0}\left\{2x+h+1\right\}=2x+1\end{aligned}$$

(4)

$$(a)' = \lim_{h\to 0}\frac{a-a}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

(5)

$$
\begin{aligned}
(x^4)' &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4-x^4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3)}{h} = \lim_{h\to 0}\{4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3\} \\
&= 4x^3
\end{aligned}
$$

(6)

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{x}\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{x-(x+h)}{(x+h)x} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h)x} \\
&= -\frac{1}{x^2}
\end{aligned}
$$

演習問題 5.15　テキストを参考にして，定理 5.12, 5.13, 5.14 を証明せよ。

定理 5.12 はすでに証明してあるので，他を証明する。

最初に定理 5.13 の証明。次が成立することを注意しておく：「ある $q(x)$ と $\varepsilon(x)$ に対し

$$f(x+h)-f(x) = q(x)h+\varepsilon(h)h$$

が成立するとき，$\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ が成立すれば $f(x)$ は微分可能であり，$f'(x)=q(x)$ が成立する。逆に $f(x)$ が微分可能のとき $\varepsilon(x)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)$ とおくと，

$$f(x+h)-f(x) = f'(x)h+\varepsilon(h)h$$

であり，$\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ が成立する。」

$y=f(x), z=g(y)$ は微分可能なので

$$
\begin{aligned}
f(x+h)-f(x) &= f'(x)h+\varepsilon_1(h)h \\
g(y+k)-g(y) &= g'(y)k+\varepsilon_2(k)k
\end{aligned}
$$

としたとき $\lim_{h\to 0}\varepsilon_1(h)=0$，$\lim_{k\to 0}\varepsilon_2(k)=0$ が成立している。$f(x+h)-f(x)=k$ とおくと $\lim_{h\to 0}k=0$ である。

$$
\begin{aligned}
g\circ f(x+h)-g\circ f(x) &= g(f(x+h))-g(f(x)) \\
&= g(f(x)+k)-g(f(x)) \\
&= g'(y)k+\varepsilon_2(k)k \\
&= g'(y)\big(f(x+h)-f(x)\big)+\varepsilon_2(k)\big(f(x+h)-f(x)\big) \\
&= g'(y)\big(f'(x)h+\varepsilon_1(h)h\big)+\varepsilon_2(k)\big(f'(x)h+\varepsilon_1(h)h\big) \\
&= g'(y)f'(x)h+\Big(g'(y)\varepsilon_1(h)+\varepsilon_2(k)f'(x)+\varepsilon_2(k)\varepsilon_1(h)\Big)h
\end{aligned}
$$

$\varepsilon(h) = g'(y)\varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(k)f'(x) + \varepsilon_2(k)\varepsilon_1(h)$ とおくと

$$g \circ f(x+h) - g \circ f(x) = g'(y)f'(x)h + \varepsilon(h)h$$

となり，$h \to 0$ のとき $\lim_{h\to 0} k = 0$，$\lim_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = 0$，$\lim_{h\to 0} \varepsilon_2(k) = 0$ となるので

$$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$$

となる。最初の注意より $g \circ f(x)$ は微分可能で，導関数は $g'(y)f'(x)$ となる。よって

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

が成立する。

次に定理 5.14 を証明する。関数 f と f の逆関数 f^{-1} を合成した関数は恒等写像である。即ち $f^{-1} \circ f(x) = x$ となる。$\dfrac{dx}{dx} = 1$ なので，定理 5.13 を適用すると，

$$1 = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dx}$$

となる。これより

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

を得る。

演習問題 5.16 任意の自然数 n に対して $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$ が成立する事を数学的帰納法で示せ。

$n = 1$ のとき場合を考える。

$$(x^1)' = x' = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1 = 1x^0 = 1x^{1-1}$$

よって $n = 1$ のとき成立している。

$n = k$ のとき成立を仮定する。即ち $(x^k)' = kx^{k-1}$ の成立を仮定する。積の微分法を用いると

$$\begin{aligned}
(x^{k+1})' &= (x^k \cdot x)' = (x^k)'x + x^k x' \\
&= kx^{k-1}x + x^k \cdot 1 = kx^k + x^k \\
&= (k+1)x^{k+1-1}
\end{aligned}$$

よって $n = k+1$ のときの成立が示された。数学的帰納法によりすべての n で成立する。

演習問題 5.17 次の有理関数の導関数を求めよ。

(1) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ (2) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ (3) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

(1) 商の微分法を用いてもよいが，ここでは積の微分法と合成関数の微分法を組み合わせる。

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = (x-1)'\left(\frac{1}{x+1}\right) + (x-1)\left(\frac{1}{x+1}\right)' \\ &= \frac{1}{x+1} + (x-1)\left(\frac{-1}{(x+1)^2}\right) = \frac{2}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

(2) (1) と同様に解いてもよいし，$y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = \dfrac{x^2-1+2}{x^2-1} = 1 + \dfrac{2}{x^2-1}$ と変形して

$$y' = \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right)' = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

という計算法もある。

(3)

$$y' = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

演習問題 5.18　n を自然数，m を整数とする。$u = x^{\frac{1}{n}}$，$y = u^m$ とおく。合成関数の導関数 (定理 5.13) を用いて関数 $y = x^{\frac{m}{n}}$ の導関数を求め，その導関数が $y' = \left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \dfrac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$ の形をしていることを確かめよ。

$\dfrac{dy}{du} = mu^{m-1}$，$\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ より

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = mu^{m-1}\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} \\ &= \frac{m}{n}(x^{\frac{1}{n}})^{m-1}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-1} \\ &= \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} \end{aligned}$$

となるので成立が確かめられる。

演習問題 5.19　次の関数の導関数を定義に基づいて求めよ。ただし次の極限値は用いてよい。

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1 \qquad \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1$$

(1) $y = x^3$　　(2) $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

(3) $y = \cos 2x$　　(4) $y = \log x$

(1)

$$\begin{aligned} (x^3)' &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(3x^2 + 3xh + h^2\right) = 3x^2 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\dfrac{x+h+1}{(x+h)^2+1}\right)-\left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{(x+h+1)(x^2+1)-(x+1)((x+h)^2+1)}{((x+h)^2+1)(x^2+1)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(-x^2-2x+1-xh-h)}{h((x+h)^2+1)(x^2+1)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-x^2-2x+1-xh-h}{((x+h)^2+1)(x^2+1)}=\frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\big(\cos 2x\big)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos 2(x+h)-\cos 2x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos 2x\cos 2h-\sin 2x\sin 2h-\cos 2x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\cos 2x\frac{\cos 2h-1}{h}-\sin 2x\frac{\sin 2h}{h}\right\}\\ &= \cos 2x\lim_{h\to 0}\frac{\cos 2h-1}{h}-\sin 2x\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{h}\end{aligned}$$

となる。ここで，

$$\frac{\cos 2h-1}{h}=\frac{(\cos 2h-1)(\cos 2h+1)}{h(\cos 2h+1)}=\frac{-\sin^2 2h}{h(\cos 2h+1)}$$

なので

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\cos 2h-1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{-\sin^2 2h}{h(\cos 2h+1)}\\ &= -\lim_{h\to 0}2\frac{\sin 2h}{2h}\frac{\sin 2h}{\cos 2h+1}\\ &= -2\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{2h}\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{\cos 2h+1}\\ &= -2\cdot 1\cdot 0=0\end{aligned}$$

であり，

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{h} = \lim_{h\to 0}2\frac{\sin 2h}{2h}=2\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{2h}=2\cdot 1=2$$

なので

$$\big(\cos 2x\big)'=-2\sin 2x$$

となる。

(4)

$$\big(\log x\big)' = \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}$$

であるが，ここで $k=\log(x+h)-\log x$ とおくと $h\to 0$ のとき $k\to 0$ となる。

$$\log(x+h)-\log x=\log\frac{x+h}{x}$$

なので $\log\dfrac{x+h}{x}=k$ より $e^k=\dfrac{x+h}{x}$ を得る。これを h について解くと

$$h=x(e^k-1)$$

となる。これを代入して次を得る。

$$\begin{aligned}\bigl(\log x\bigr)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\lim_{k\to 0}\frac{k}{x(e^k-1)}\\ &= \frac{1}{x}\lim_{k\to 0}\frac{k}{e^k-1}=\frac{1}{x}\end{aligned}$$

演習問題 5.20　次の関数の導関数を求めよ (諸公式を用いてよい)。

(1) x^2+3x+2
(2) $3\sin x+2e^x$
(3) $y=xe^x$
(4) $y=\sin^{100}2x$
(5) $y=x^3\log(2x^3+x)$
(6) $y=\arcsin(x^2+1)$
(7) $(x^2+2)(x^2+3)$
(8) $\sin(3x+1)$
(9) $e^x\sin x$
(10) $y=x^x$

(1)

$$\bigl(x^2+3x+2\bigr)' = 2x+3$$

(2)

$$\bigl(3\sin x+2e^x\bigr)' = 3\cos x+2e^x$$

(3)

$$\bigl(xe^x\bigr)' = e^x+xe^x$$

(4)

$$\bigl(\sin^{100}2x\bigr)' = 200\sin^{99}2x\cdot\cos 2x$$

(5)

$$\bigl(x^3\log(2x^3+x)\bigr)' = 3x^2\log(2x^3+x)+x^3\frac{6x^2+1}{2x^3+x}$$

(6)

$$\bigl(\arcsin(x^2+1)\bigr)' = \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2+1)}}$$

(7)

$$\begin{aligned}\bigl((x^2+2)(x^2+3)\bigr)' &= (x^2+2)'(x^2+3)+(x^2+2)(x^2+3)'\\ &= 2x(x^2+3)+2x(x^2+2)=2x(2x^2+5)\end{aligned}$$

(8)

$$\bigl(\sin(3x+1)\bigr)' = 3\cos(3x+1)$$

(9)

$$\left(e^x \sin x\right)' \quad = \quad e^x \sin x + e^x \cos x$$

(10) 両辺の対数をとると

$$\log y = \log x^x = x \log x$$

なので両辺を x で微分すると

$$\frac{dy}{dx}\frac{1}{y} = \log x + x\frac{1}{x} = \log x + 1$$

となる。よって

$$\left(x^x\right)' = x^x(\log x + 1)$$

である。

演習問題 5.21　次を示せ。

$$y = \log|x| \ (x \neq 0) \text{ とおくと } y' = \frac{1}{x}$$

$x > 0$ のときはすでに示したように

$$\left(\log x\right)' = \frac{1}{x}$$

が成立する。

$x < 0$ のとき，$|x| = -x$ なので，$u = -x$ とおき合成関数の微分法を用いる。

$$\begin{aligned}\left(\log|x|\right)' &= \frac{d\log(-x)}{dx} = \frac{d\log u}{du}\frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{u}(-1) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}\end{aligned}$$

いずれの場合も

$$\left(\log|x|\right)' = \frac{1}{x}$$

が成立する。

演習問題 5.22　次を示せ。

$$\left\{x \arctan x - \frac{1}{2}\log(x^2+1)\right\}' = \arctan x$$

$$\begin{aligned}\left(x \arctan x\right)' &= \arctan x + \frac{x}{1+x^2} \\ \left(\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right)' &= \frac{x}{x^2+1}\end{aligned}$$

から命題が示される。

演習問題 5.23　対数微分法をもちいて次の微分をもとめよ。

(1) $x^{\sin x}$　　(2) $\sqrt{\dfrac{(x^2+2)^2}{(x^2+3)^3}}$

(1)　$y = x^{\sin x}$ の両辺の対数を取ると，$\log y = \log x^{\sin x} = \sin x \log x$ である。この両辺を x で微分すると

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cos x \log x + \sin x \frac{1}{x}$$

なので

$$\frac{dy}{dx} = x^{\sin x}\left(\cos x \log x + \sin x \frac{1}{x}\right)$$

が得られる。

(2)　$y = \sqrt{\dfrac{(x^2+2)^2}{(x^2+3)^3}}$ の両辺の対数を取ると，

$$\begin{aligned}
\log y &= \log\sqrt{\frac{(x^2+2)^2}{(x^2+3)^3}} = \log\left(\frac{(x^2+2)^2}{(x^2+3)^3}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{(x^2+2)^2}{(x^2+3)^3} = \frac{1}{2}\left\{\log(x^2+2)^2 - \log(x^2+3)^3\right\} \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2\log(x^2+2) - \frac{1}{2}\cdot 3\log(x^2+3) = \log(x^2+2) - \frac{3}{2}\log(x^2+3)
\end{aligned}$$

である。この両辺を x で微分すると

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2+2} - \frac{3}{2}\frac{2x}{x^2+3}$$

なので

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \sqrt{\frac{(x^2+2)^2}{(x^2+3)^3}}\left(\frac{2x}{x^2+2} - \frac{3}{2}\frac{2x}{x^2+3}\right) \\
&= \frac{2x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}} - \frac{3x(x^2+2)}{(x^2+3)^2\sqrt{x^2+3}}
\end{aligned}$$

が得られる。