

数学序論演習に対する追加説明#2

形式

- 学籍番号は次の様を書いて下さい。
 - 1年生は出席番号を書いて下さい。
学籍番号の下5桁から下2桁部分を抜き出し先頭の0は削除したもの。例えば学籍番号が1210800050であれば5, 1210812000であれば1200です。
 - 2年生以上は10桁の学籍番号を書いて下さい。
- 学籍番号を書き忘れないようにして下さい。
- 用紙を置く場所を間違えないで下さい。

内容

- 数学は論理の積み重ねですから、要綱・演習問題で分からない所があれば、その部分より前に書いてあることの理解が不十分な場合が多い。例えば演習問題 1.5 で

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a < x \implies b < x$$

という命題の否定命題をつくれないうきは、(1)「 $\forall x$ 」の否定がつけられないなら、少し前の部分を見ればよいが、(2)「 $a < x \implies b < x$ 」の否定が分からないときは1.1節を見る必要があります。どこでやったか記憶にないときは、要綱を順にさかのぼりながら見て探すのも1つの方法です。

- 追加注意#1でも言いましたが、理由を書くこと。
例えば演習問題 1.4 で「真偽を判定せよ」とありますが、これは「結論だけ述べよ」という意味ではなく、「どうしてそうなるかの理由」・「判定の根拠」を示すことが必要です。これからある演習問題も常にそういう意味だと理解して下さい。
- 前項と関連して「どの様を書いてよいのか分からない」ということに関して述べておきます。このようなときには2通りの場合が考えられます。(1) 本当に書き方だけが分からない場合、と(2) 内容の理解が不十分な場合、です。

「どの様を書いてよいのか分からない」と質問してくる人の半数以上は(1)の書き方の問題ではなく、(2)の内容理解の問

題です。(2) に関しては後で述べるとして、ここでは (1) について述べます。

自分の頭の中に、演習問題を解いている自分とは別に、他人の立場でその演習問題の解答を読んでいる自分を想定します。その他人である自分が、自分である自分の書いたものを読んで、論理が追えて正しいと思えたら OK です。最初は慣れないと思いますが、少し訓練するとできるようになると思います。他人として融通のきかない computer を想定するのも 1 つの方法です。

- 自分が内容を理解しているのか and/or してないのかを自分で正確に把握することも重要です。それができると理解への道の 50%以上の場所にいると言えます。自己把握に関して言うと次の様な段階が考えられます。(3) を (2) に変える所が理解の最も重要な階梯だと言えます。

- (1) 正確に理解している。
- (2) 理解が不十分だがどこが理解できていないかを把握している。
- (3) 理解が不十分だがどこが理解できていないかを把握できていない。所謂「なんとなく分からない」状態。
- (4) 理解してないのに理解していると誤解している。

- 演習問題 1.5 を解説する。net に載せてある解説も参考にしてください。

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a < x \implies b < x$$

という命題を P とする。 P の否定命題 $\neg P$ は

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad a < x \wedge x \leq b$$

となる。

「 $a < b$ 」という命題を Q とおく。 $\neg P$ が真のとき

$$a < x \wedge x \leq b \implies a < b$$

より Q も真になる。よって

$$\neg P \implies Q$$

が成立する。この段階で $\neg P$ と Q が同値としてしまった人が若干いたが、この段階では同値は示されていない。 $Q \implies \neg P$

を示すことが必要である。そのためには Q が真のとき $\neg P$ の性質をもつ x を見つければよい。

Q が真だとする。 $x = \frac{a+b}{2}$ とおくと $a < x < b$ を満たす。
よって

$$Q \implies \neg P$$

が成立する。以上により $\neg P$ と Q は同値である。即ち

$$\neg P \equiv Q$$

が成立する。これより

$$P \equiv \neg Q$$

である。以上により $\neg Q$ が真のとき即ち $a \geq b$ のとき命題 P は真であり、 $a < b$ のとき偽であることが分かる。

- 演習問題 1.6 を解説する。

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \quad x > y$$

と

$$\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} \quad x > y$$

の真偽を考察せよ、というのが問題であった。

「任意」と「存在」が2つ以上あるときは次のように考えるものよいかもれない。自分と相手にゲームをしている。自分は命題を成立させたいと思い、相手は命題が成立させたくないと思っているとする。

「任意」は相手が選び、「存在」は自分が選ぶと考える。

前者の命題は相手が実数 x をどの様にも選んでも、それに対応して自分が $x > y$ となる y を選べるかという問題になる。これは当然可能なので前者は正しい命題である。

後者の命題は最初に自分が y を選ばなくてはならない。どのような y を選ぶかという任意の x に対して $x > y$ となる y であるが、そのような y は存在しないので選ぶことができない。よって後者は正しくない命題である。