数学序論演習に対する追加説明#6

形式

- 学籍番号は次の様に書いて下さい。
  - 1 年生は出席番号を書いて下さい。
    学籍番号の下 5 桁から下 2 桁部分を抜き出し先頭から続く 0 を削除したもの。例えば学籍番号が **1210800990** であれば **99**，**1210812000** であれば **1200** です。
  - 2 年生以上は 10 桁の学籍番号を書いて下さい。
  - 短期留学生はどちらでもいいです。
- 学籍番号を書き忘れないようにして下さい。

  フォーマットが正しくない解答は以後**未提出**とみなします。

- 今回は本当です！
- 用紙を置く場所を間違えないで下さい。

演習問題 2.1 (4) について

3 で割ると余りが 2 であり，5 で割ると余りが 3 となるような自然数は 15 で割ると余りが 8 になります。

このことを見つけることが大切ですが，見つけただけでは「解析」であり「証明」にはなりません。

「n を 3 で割ると余りが 2 である」という命題を $P_1(n)$ とします。「n を 5 で割ると余りが 3 である」という命題を $P_2(n)$ とします。「n を 15 で割ると余りが 8 である」という命題を $P_3(n)$ とします。

証明の key point は

$$P_1(n) \wedge P_2(n) \iff P_3(n)$$

を示すことです。これが示されれば

$$\{n \in \mathbb{N} \mid P_1(n) \wedge P_2(n)\} = \{n \in \mathbb{N} \mid P_3(n)\}$$

が分かり，

$$\{n \in \mathbb{N} \mid P_3(n)\} = \{15k + 8 \mid k \in \mathbb{N} \vee k = 0\}$$

は (1)–(3) と同様に分かるので，証明が完成します。

- 最初に $P_3(n) \implies P_1(n) \wedge P_2(n)$ を示す。そのためには (1) $P_3(n) \implies P_1(n)$ と (2) $P_3(n) \implies P_2(n)$ を示せばよい。

  $P_3(n)$ の成立を仮定すると，ある整数 k で $n = 15k + 8$ となるものが存在する。

  $$n = 15k + 8 = 3 \cdot 5k + 3 \cdot 2 + 2 = 3(5k + 2) + 2$$

  より n を 3 で割ると余りは 2 である。よって $P_1(n)$ が成立する。

  $$n = 15k + 8 = 5 \cdot 3k + 5 \cdot 1 + 3 = 5(3k + 1) + 3$$

  より n を 5 で割ると余りは 3 である。よって $P_2(n)$ が成立する。

- 次に $P_1(n) \wedge P_2(n) \implies P_3(n)$ を示す。n を 15 で割った余りを α とすると，ある整数 k が存在して $n = 15k + \alpha$ と書けている。ただし $0 \leqq \alpha < 15$ である。

  $P_1(n)$ が成立しているとき α を 3 で割った余りも 2 である。よって

  $$\alpha = 2 \vee \alpha = 5 \vee \alpha = 8 \vee \alpha = 11 \vee \alpha = 14$$

  である。$P_2(n)$ が成立しているとき α を 5 で割った余りも 3 である。よって

  $$\alpha = 3 \vee \alpha = 8 \vee \alpha = 13$$

  である。両方が成立するのは $\alpha = 8$ である。よって $n = 15k+8$ と書け $P_3(n)$ の成立が示される。