数学序論演習に対する追加説明#7

演習問題 2.3

- 最初に次の 2 つを確認しておく。

「$\forall x \ \ P(x)$」の否定命題は「$\exists x \ \ \neg P(x)$」である。
「$P \implies Q$」の否定は「$P \wedge \neg Q$」である。

- (2) **を示す：**「$\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$」は定義より

$$\forall x \quad x \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{N}$$

を意味する。よって「$\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$」の否定命題は

$$\exists x \quad x \in \mathbb{Z} \wedge x \notin \mathbb{N}$$

である。これを示せばよい。$x = -23$ とすると，x は整数であり，自然数ではない。よって

$$x \in \mathbb{Z} \wedge x \notin \mathbb{N}$$

が成立している。

- (3) **を示す：**「$\mathbb{N} = \mathbb{Z}$」は定義により

$$\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z} \quad \wedge \quad \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$$

を意味する。

(2) の結果は「$\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$」が成立しないことを示している。よって $\mathbb{N} = \mathbb{Z}$ も成立しない。

演習問題 2.5

- (2) **を示す：**真理表を用いてやっていた人がいて,「真理表を使うのか」という質問を受けたので，真理表を使う方法を紹介する。

- 最初に

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

が成立することを注意しておく。

- 真理表は命題に関するものなので，命題に名前をつける。

  「$x \in A$」という命題を $A(x)$ と書く。混乱を避けるために $P(x)$ というように別の文字を使うことも考えられるのだが，ここでは対応が分かりやすいように同じ文字を使う。「A」と書いたら集合であり「$A(x)$」と書いたら「$x \in A$」という内容の命題である。

  「$x \in B$」という命題を $B(x)$ と書き,「$x \in C$」という命題を $C(x)$ と書く。このとき真理表を書くと次のようになる。

$A(x)$	$B(x)$	$C(x)$	$B(x) \vee C(x)$	$A(x) \wedge (B(x) \vee C(x))$	$A(x) \wedge B(x)$	$A(x) \wedge C(x)$	$(A(x) \wedge B(x)) \vee (A(x) \wedge C(x))$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

- よって

$$A(x) \wedge (B(x) \vee C(x)) \equiv (A(x) \wedge B(x)) \vee (A(x) \wedge C(x))$$

が成立している。

- 最初に注意したことから,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} = \{x \mid A(x) \vee B(x)\}$$
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} = \{x \mid A(x) \wedge B(x)\}$$

が成立している。よって

$$\begin{aligned} A\cap(B\cup C) &= \{\, x \mid A(x)\wedge x\in B\cup C \,\} \\ &= \{\, x \mid A(x)\wedge(B(x)\vee C(x)) \,\} \\ &= \{\, x \mid (A(x)\wedge B(x))\vee(A(x)\wedge C(x)) \,\} \\ &= \{\, x \mid x\in A\cap B\vee x\in A\cap C \,\} \\ &= (A\cap B)\cup(A\cap C) \end{aligned}$$

となる。

- しかし前で紹介した方法は間違いではないが，車輪を再発明するものである。

  $$\boxed{P\wedge(Q\vee R)=(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)}$$

  が成立することはすでに演習問題 1.2(命題 1.1 の証明) で示されている。

- これを用いると次のようになる。

  $$\begin{aligned} A\cap(B\cup C) &= \{\, x \mid x\in A\wedge x\in B\cup C \,\} \\ &= \{\, x \mid x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C) \,\} \\ &= \{\, x \mid (x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C) \,\} \\ &= \{\, x \mid x\in A\cap B\vee x\in A\cap C \,\} \\ &= (A\cap B)\cup(A\cap C) \end{aligned}$$

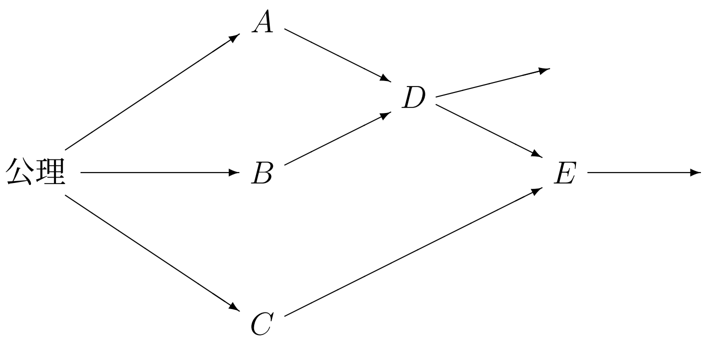
  が成立する。解説も参考にして下さい。

- 前にやったことを忘れてしまっている人もいるので，もう一度**論理**の重要性を**強調**しておきましょう。

  数学は単純化して言うと

  $$\boxed{A \quad\Longrightarrow\quad B}$$

  の集まりです。前提とすること (**公理**と呼ばれる) から必要な結論を導き出していく総体が数学です。



公理として何を採用するかも重要な問題ですが，ここではそれにはふれないでおきます。

- 「かつ」,「または」,「否定」も勿論重要ですが,「**ならば** ($\Longrightarrow$)」の重要性は数学の構造から明らかでしょう。早く「ならば」とお友達になってください。

- 「任意」と「存在」も非常に重要です。「高校までででてきてない」と思う人もいるかもしれませんが，そうではありません。数学を述べるときに必要な単語なので形式的にでてきてないだけであって，実際的には登場しています。例えば次の「命題」を考えます。

$$\boxed{x = 1 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 1}$$

これは厳密には命題関数であり命題ではありません。この「命題」の正確な内容は

$$\boxed{\forall x \qquad x = 1 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 1}$$

です。高校の教科書は「任意は省略する」という流儀で書かれているのです。

- 「高校流を続ければよいのではないか」という意見がでるかもしれませんね。しかし「任意」と存在が絡んでくるとそうは行きません。次は $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ の「厳密な定義」です。(内容を理解できなくてもかまいません。)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

ここで「任意」を省略すると全く意味が分からなくなります。

- 存在はどうでしょう。2 次方程式の解の公式を考えます。

$a, b, c \in \mathbb{R}$ で $a \neq 0$ のとき $f(x) = ax^2 + bx + c$ とするとき $f(x) = 0$ となる x は $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

「解が存在する」という事実は

$$\exists x \in \mathbb{C} \quad f(x) = 0$$

です。前者があれば後者はいりません。即ち具体的に解を与える式があるということは当然解の存在も含んでいます。

しかし「解が存在する」ということと「解を与える式がある」というのは別のことです。5 次方程式を考えます。

$$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f \qquad (a \neq 0)$$

5 次方程式 $f(x) = 0$ の解を与える「解の公式」は**存在しない**ことが知られています。しかし「解が存在する」ことは知られています。即ち

$$\exists x \in \mathbb{C} \quad f(x) = 0$$

は 5 次方程式でも成立します。

「存在する」ことと「求める具体的方法 (アルゴリズム) がある」は別のことで，問題を考えていくとき，この 2 つを分けて考えていくことは重要です。