数学序論演習に対する追加説明#8

定義

(1) 命題

(2) 論理記号:「かつ ($\wedge$), または ($\vee$), でない ($\neg$), ならば ($\Longrightarrow$)」

(3) 真理表

(4) 命題の同値

(5) 背理法

(6) 命題関数

(7) 任意 ($\forall$) と存在 ($\exists$)

(8) 任意と存在の否定

(9) 必要条件，十分条件

(10) 数学的帰納法

(11) 集合，元，空集合，含む ($\in$)

(12) 集合の表し方 $\{x \mid P(x)\}$

(13) 部分集合，真部分集合

(14) 集合が等しいことの定義

(15) 和集合，共通部分，互いに素

(16) 差集合，全体集合，補集合

(17) 順序対，直積集合

(18) 写像

(19) 像，原像，定義域，終域，値域，恒等写像

(20) 全射，単射，全単射，合成写像，写像が等しいということ

(21) 関数，グラフ

(22) 逆写像

命題

(1) 論理記号に関する性質

(1) $\neg(\neg P) \equiv P$ (2 重否定の法則)

(2) $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ (分配法則)

(3) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ (分配法則)

(4) $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$ (de Morgan の法則)

(5) $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$ (de Morgan の法則)

(6) $(P \implies Q) \equiv (\neg P \vee Q)$

(7) $P \implies Q$ の否定は $P \wedge \neg Q$

(8) **対偶** ($contraposition$) $\quad (P \implies Q) \equiv (\neg Q \implies \neg P)$

(2) 任意と存在に関する否定命題

(3) 集合算

1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(4) 1) $B \subseteq A \iff B^c \supseteq A^c$

2) De Morgan の法則

$$
\begin{aligned}
(A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \\
(A \cap B)^c &= A^c \cup B^c
\end{aligned}
$$

(5) 1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

2) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

3) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ とはならない例を挙げよ。

定義の理解

- 高い建物を建てようとすると基礎が大切です。東京スカイツリーの基礎は地下 50 メートルまで達する鉄柱だそうです。数学の基礎は「**定義**」です。

  スカイツリーは最初に地下に鉄柱を打ち込み，その後上に伸ばして行きましたが，数学の理解はそうとは限りません。100 メートルぐらい作った所で基礎がぐらついてきたら，もう一度戻って基礎を固めるというように「行きつ戻りつ」で理解を深めて行くということも必要です。

- 理解の仕方・方法は人により異なるので，すべての人に当てはまるとは言えないが，文学のように読んでも理解できない場合が多い。そういうときは具体例を考えながら読むというのも理解を深める１つの方法である。

  例えば値域の場合を考えます。写像 $f : A \longrightarrow B$ の値域 $f(A)$ の定義は

  $$f(A) = \{ f(a) \mid a \in A \} = \{ b \in B \mid \exists a \in A \ \ b = f(a) \}$$

  です。

  ここでは集合の表し方 $\{ x \mid P(x) \}$ をきちんと理解していることを前提とします。定義に使われている事項があやふやな場合は更にさかのぼって前の定義を理解する必要があります。

  $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}, B = \{ 1, 2, 3 \}$ とし，写像 $f : A \longrightarrow B$ を

  $$f(1) = 3,\ \ f(2) = 1,\ \ f(3) = 3,\ \ f(4) = 1$$

  とする。

  必要なときに適当な例を自分で考えることができるのは，理解がかなり進んでいる印です。要綱ででてきた例を用いるのもひとつの方法です。

  何かの雑誌に「ある概念を理解するためには 3 つ例を考えよ。1 つは自明な例，1 つは普通の例，1 つは難しい例。」と書いてありました。数学科の学生を対象にした文章でしたが，参考になるかもしれませんネ。

  $f(A)$ は $f(a)$ の集まりで，a は A の元です。今の場合 $a = 1, 2, 3, 4$ のいずれかなので，$f(A)$ は

  $$f(1),\ \ f(2),\ \ f(3),\ \ f(4)$$

  の集まり

  $$\{ f(1),\ \ f(2),\ \ f(3),\ \ f(4) \}$$

  になりますが，

  $$\{ f(1),\ \ f(2),\ \ f(3),\ \ f(4) \} = \{ 3, 1, 3, 1 \} = \{ 1, 3 \}$$

  です。

  今の場合

  $$f(A) = \{ 1, 3 \} \neq \{ 1, 2, 3 \} = B$$

  なので f は全射ではない。

- もう一つ例を考える。$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ を $f(x)=x^2$ で定義する。$x\in\mathbb{R}$ に対しては $f(x)=x^2\geqq 0$ なので

$$f(\mathbb{R})=[\,0,\,\infty\,)$$

の成立が予想される。これを証明する。$f(\mathbb{R})$ は無限集合なので，前の例のように元をすべて列挙することはできない。

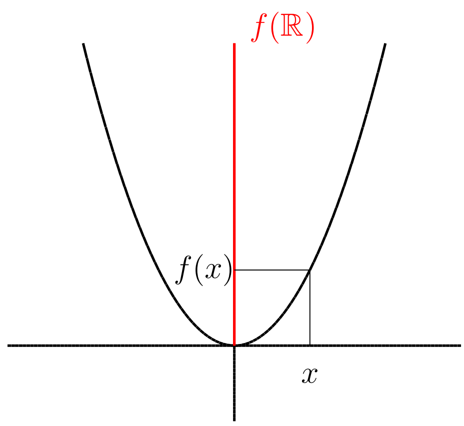
定義より，集合 A,B に対し $A=B$ を示すためには $A\subseteq B\wedge A\supseteq B$ を示せばよい。$A\subseteq B$ を示すには $\forall a\ (a\in A \implies a\in B)$ を示す。

y を $f(\mathbb{R})$ の任意の元とすると，$f(\mathbb{R})$ の定義よりある $x\in\mathbb{R}$ が存在して $y=f(x)$ となる。このとき $y=f(x)=x^2\geqq 0$ なので $y\in[\,0,\,\infty\,)$ となり $f(\mathbb{R})\subseteq[\,0,\,\infty\,)$ となる。

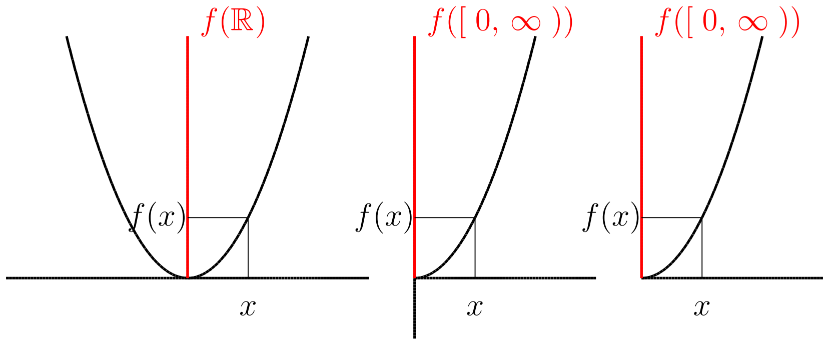
y を $[\,0,\,\infty\,)$ の任意の元とすると $y\geqq 0$ である。$x=\sqrt{y}$ とおくと $x\in\mathbb{R}$ であり，$f(x)=x^2=\left(\sqrt{y}\right)^2=y$ となるので $y\in f(\mathbb{R})$ となり $f(\mathbb{R})\supseteq[\,0,\,\infty\,)$ が示される。

以上により $f(\mathbb{R})=[\,0,\,\infty\,)$ が成立する。

- 証明にはならないが幾何学的に考えることも意味を理解する上で大切である。人間は視覚的動物である。



- 例 2.9 の他の例も図示すると次のようになっている。



(2)　　(3)　　(4)

(5) は定義域も終域も $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqq 0\}$ なのでグラフを正確に書くのは不可能であるが，図 (4) で x 座標および y 座標が有理数である点になっている。