数学序論演習に対する追加説明#9

演習問題 3.4 $|\alpha+\beta| \leqq |\alpha|+|\beta|$ の証明

- 演習問題解説では幾何的方法も載せてあるので参考にして下さい。

- 証明すべき式の両辺をそれぞれ 2 乗すると，

$$
\begin{aligned}
|\alpha+\beta|^2 &= (\alpha+\beta)\overline{(\alpha+\beta)} = \alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta} \\
&= |\alpha|^2+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+|\beta|^2 \\
(|\alpha|+|\beta|)^2 &= |\alpha|^2+2|\alpha|\,|\beta|+|\beta|^2
\end{aligned}
$$

となる。$\alpha=a_1+a_2i, \beta=b_1+b_2i$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta &= 2(a_1b_1+a_2b_2) \\
2|\alpha|\,|\beta| &= 2\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}
\end{aligned}
$$

となる。

- 演習問題解説では代数的方法はシュワルツの不等式を用いたが，ここではベクトルの内積の性質を利用する。

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|\cos\theta$$

が成立する。ここで「$\cdot$」は内積，θ はベクトル x と y がなす角とする。$|\cos\theta| \leqq 1$ に注意すると

$$|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}| \leqq |\boldsymbol{x}|\;|\boldsymbol{y}| \tag{1}$$

が成立する。$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とすると (1) は

$$|a_1b_1+a_2b_2| \leqq \sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2} \tag{2}$$

となる。絶対値をはずしても不等式は成立するので

$$a_1b_1+a_2b_2 \leqq \sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2} \tag{3}$$

が成立している。

- ここまでが解析であるが，ここまで来ると証明は簡単だろう。
次が証明である。

- $\alpha = a_1 + a_2 i, \beta = b_1 + b_2 i\ (a_i, b_i \in \mathbb{R})$ とおくと

$$\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta = 2(a_1 b_1 + a_2 b_2)$$
$$|\alpha|\,|\beta| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

が成立する。また不等式 (3)

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \leqq \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

より

$$\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta \leqq 2|\alpha|\,|\beta|$$

が成立している。

$$\begin{aligned}(|\alpha| + |\beta|)^2 &= |\alpha|^2 + 2|\alpha|\,|\beta| + |\beta|^2 = \alpha\overline{\alpha} + 2|\alpha|\,|\beta| + \beta\overline{\beta} \\ &\geqq \alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta + \beta\overline{\beta} = (\alpha + \beta)\left(\overline{\alpha} + \overline{\beta}\right) \\ &= (\alpha + \beta)\overline{(\alpha + \beta)} = |\alpha + \beta|^2\end{aligned}$$

の平方根をとると

$$|\alpha| + |\beta| \geqq |\alpha + \beta|$$

が得られる。