数学序論演習に対する追加説明#11

形式

- 学籍番号は次の様に書いて下さい。
  - 1 年生は出席番号を書いて下さい。
    学籍番号の下 5 桁から下 2 桁部分を抜き出し先頭から続く 0 を削除したもの。例えば学籍番号が **1210800990** であれば **99**, **1210812000** であれば **1200** です。
  - 2 年生以上は 10 桁の学籍番号を書いて下さい。
  - 短期留学生はどちらでもいいです。
- 学籍番号を書き忘れないようにして下さい。
- フォーマットが正しくない解答は以後**未提出**とみなしています。
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ について ：前回グラフから考えたが，同じ式を加法定理を用いて導出する。

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \sin\frac{\pi}{2}\cos(-x)+\cos\frac{\pi}{2}\sin(-x)\\ &= 1\cdot\cos(-x)+0\sin(-x)\\ &= \cos x\end{aligned}$$

- 演習問題 4.4 (の一部) を解説する。ここでは和積公式と積和公式から 1 つずつ。

$$\begin{aligned}\sin\alpha+\sin\beta &= 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\ \sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right\}\end{aligned}$$

- 最初はオイラーの公式を使用して行う。

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\quad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

が成立する。

$$\begin{aligned}
\sin(x+y)\cos(x-y) &= \frac{e^{i(x+y)}-e^{-i(x+y)}}{2i}\,\frac{e^{i(x-y)}+e^{-i(x-y)}}{2} \\
&= \frac{e^{ix}e^{iy}-e^{-ix}e^{-iy}}{2i}\,\frac{e^{ix}e^{-iy}+e^{-ix}e^{iy}}{2} \\
&= \frac{1}{4i}\left(e^{i2x}-e^{-i2y}+e^{i2y}-e^{-2ix}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i}+\frac{e^{i2y}-e^{-i2y}}{2i}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sin 2x+\sin 2y\right)
\end{aligned}$$

この式において $\alpha = 2x, \beta = 2y$ とおくと

$$x+y=\frac{\alpha+\beta}{2}, x-y=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

となるので

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\,\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

が得られる。また $\alpha = x+y, \beta = x-y$ とおくと $2x = \alpha + \beta, 2y = \alpha - \beta$ なので

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right\}$$

が得られる。

- 次がオイラーの公式を使わない「通常の」方法である。$X = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$，$Y = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$ とおくと

$$X+Y=\alpha, \quad X-Y=\beta$$

が成立している。

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \sin(X+Y) = \sin X\cos Y+\cos X\sin Y \\
\sin\beta &= \sin(X-Y) = \sin X\cos Y-\cos X\sin Y
\end{aligned}$$

が成立しているので

$$\begin{aligned}
\sin\alpha+\sin\beta &= \sin X\cos Y+\cos X\sin Y+\sin X\cos Y-\cos X\sin Y \\
&= 2\sin X\cos Y = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

が得られる。この式で $X = \dfrac{\alpha+\beta}{2}, Y = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$ とおくと $X+Y=\alpha, X-Y=\beta$ である。これより

$$\sin(X+Y)+\sin(X-Y)=2\sin X\cos Y$$

を得る。ここであらためて $\alpha=X, \beta=Y$ とおくと

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right\}$$

が得られる。