数学序論演習に対する追加説明#12

- フォーマットが正しくない解答は**未提出**とみなしています。
- 「$\arcsin x$ を $\sin^{-1} x$ と書いてはいけないのか」という質問を受けたので説明しておきます。

  $\sin^{-1} x$ という記号は間違った記号でないので，みんなが使うことを禁止するものではありません。

  ただ次に述べるような混乱を生むことがあるので，この講義では使用しないということです。

  $\sin x$ の 2 乗はよく出てくるので

  $$(\sin x)^2 = \sin^2 x,\ \ (\cos x)^2 = \cos^2 x$$

  という記号が使用されます。また

  $$\frac{1}{X} = X^{-1}$$

  という書き方もあります。この 2 つの書き方から

  $$\frac{1}{\sin x} = (\sin x)^{-1} = \sin^{-1} x$$

  と書くと，これは間違いです。このような混乱を生まないためにこの講義では $\sin^{-1} x$ という記法を使用しません。

- $\arccos \frac{4}{5} = \arcsin \frac{3}{5}$ の証明について ： 次の解答は間違いです。

  $\arccos \frac{4}{5} = x, \arcsin \frac{3}{5} = y$ とおくと $\cos x = \frac{4}{5}, \sin y = \frac{3}{5}$ が成立している。

  $$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}$$
  $$= \sqrt{\frac{25 - 16}{25}} = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

  となるので $\sin y = \frac{3}{5} = \sin x$ が成立する。これより $x = y$ が得られて証明が完了する。

- 次が修正した解答です。

$\arccos\dfrac{4}{5}=x, \arcsin\dfrac{3}{5}=y$ とおくと

$$\cos x=\frac{4}{5}\ (0\leqq x\leqq\pi),\quad \sin y=\frac{3}{5}\ (-\frac{\pi}{2}\leqq y\leqq\frac{\pi}{2})$$

が成立している。$0\leqq x\leqq\pi$ より $\sin x\geqq 0$ である。よって

$$\begin{aligned}\sin x&=\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}\\&=\sqrt{\frac{25-16}{25}}=\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

となるので，$\sin y=\dfrac{3}{5}=\sin x$ が成立する。

$0\leqq x\leqq\pi$ と $\cos x\geqq 0$ であることから $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ が分かる。また $-\dfrac{\pi}{2}\leqq y\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $x=y$ が得られて証明が完了する。

- $\arcsin\dfrac{3}{5}+\arcsin\dfrac{5}{13}=\arcsin\dfrac{56}{65}$ の証明の方針 ：

$\arcsin\dfrac{3}{5}=x, \arcsin\dfrac{5}{13}=y, \arcsin\dfrac{56}{65}=z$ とおくと

$$\sin x=\frac{3}{5},\ \sin y=\frac{5}{13},\ \sin z=\frac{56}{65}$$

である。証明すべき結論は

$$x+y=z$$

であるが，そのためには (範囲のチェックは必要であるが)

$$\boxed{\sin(x+y)=\sin z}$$

を示せばよいことに，前問を理解した人は気付くであろう。

この問題を実際に解いてみれば，もう 1 つ山があることに気がつくだろう。$\sin(x+y)=\sin z$ から $x+y=z$ を出すために，値の範囲のチェックが必要になる。

$$\boxed{\sin(x+y)=\sin z \xrightarrow[\text{範囲チェック}]{} x+y=z}$$

範囲については $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$0 \leqq z \leqq \dfrac{\pi}{2}$ から

$$0 \leqq x + y \leqq \pi$$

は分かるが等号成立のために必要なのは

$$0 \leqq x + y \leqq \frac{\pi}{2}$$

である。このような不等式の証明は具体的な値によって方法が変わるが，最後に 2 つの方法を示す。

- $\arcsin\dfrac{3}{5} + \arcsin\dfrac{5}{13} = \arcsin\dfrac{56}{65}$ の証明 ：

$\arcsin\dfrac{3}{5} = x, \arcsin\dfrac{5}{13} = y, \arcsin\dfrac{56}{65} = z$ とおくと

$$\sin x = \frac{3}{5},\quad \sin y = \frac{5}{13},\quad \sin z = \frac{56}{65}$$

である。ただし $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x, y, z \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である。更に $\sin x \geqq 0$ 等により $0 \leqq x, y, z \leqq \dfrac{\pi}{2}$ が成立し，よって $\cos x \geqq 0, \cos y \geqq 0$ が分かる。

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$$

$\sin(x + y)$ は加法定理を用いると

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ &= \frac{3}{5}\frac{12}{13} + \frac{4}{5}\frac{5}{13} = \frac{56}{65} \end{aligned}$$

となる。

$\sin(x + y) = \sin z$ であり，

$$0 \leqq z \leqq \frac{\pi}{2},\quad 0 \leqq x + y \leqq \frac{\pi}{2}(\text{後で示す})$$

より $x + y = z$ となる。

- 1 つ目の方法 ： 次の 2 つの事実から導く

(1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$かつ $0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{4} \implies 0 \leqq x+y \leqq \dfrac{\pi}{2}$

(2) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq X, Y \leqq \dfrac{\pi}{2}$ ならば

$$X \leqq Y \iff \sin X \leqq \sin Y$$

$\dfrac{5}{13} < \dfrac{3}{5} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ が成立している。$\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ なので

$$\sin x = \frac{3}{5} < \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}, \quad \sin y = \frac{5}{13} < \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$$

が成立する。よって (2) より

$$0 \leqq x < \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leqq y < \frac{\pi}{4}$$

となり (1) を用いて

$$0 \leqq x+y < \frac{\pi}{2}$$

の成立が示される。

この方法は (1) の仮定が成り立たない場合もあるので使えない場合もある。次の方法はいつでも使える。

- 2 つ目の方法 ： 次の事実から導く。

$$\boxed{\begin{array}{c} 0 \leqq X \leqq \pi \text{ のとき} \\ X \leqq \dfrac{\pi}{2} \iff \cos X \geqq 0 \end{array}}$$

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x\cos y - \sin x\sin y \\ &= \frac{4}{5}\frac{12}{13} - \frac{3}{5}\frac{5}{13} = \frac{33}{65} \geqq 0 \end{aligned}$$

よって $0 \leqq x+y \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である。