

数学序論演習に対する追加説明#13

- もう一度逆三角関数について解説します。

数式の計算と変数の範囲のチェックは車の両輪

- $4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$ を示す。

$\arctan \frac{1}{5} = x, \arctan \frac{1}{239} = y$ とおくと

$$\tan x = \frac{1}{5} \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right), \quad \tan y = \frac{1}{239} \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right)$$

が成立している。

示すべき結論は

$$4x - y = \frac{\pi}{4}$$

である。

$$\tan(4x - y) = 1$$

および

$$-\frac{\pi}{2} < 4x - y < \frac{\pi}{2}$$

が示されれば結論が得られる (何故か? 理由の分からない人はよく考えて理解して下さい)。

- 等式の証明のためにはタンジェントの加法定理が必要になる。サイン, コサインの加法定理を前提としてそれを示しておく。サイン, コサインの加法定理は

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

であり, $\sin(-x) = -\sin x, \cos(-x) = \cos x$ に注意すると

$$\begin{aligned} \sin(x - y) &= \sin(x + (-y)) = \sin x \cos(-y) + \cos x \sin(-y) \\ &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(x - y) &= \cos(x + (-y)) = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y) \\ &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{aligned}$$

も成立している。

$$\begin{aligned}\tan(x+y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} \\ &= \frac{\frac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \frac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} \\ &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}\end{aligned}$$

と $\tan(-x) = -\tan x$ より

$$\begin{aligned}\tan(x-y) &= \tan(x+(-y)) = \frac{\tan x + \tan(-y)}{1 - \tan x \tan(-y)} \\ &= \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}\end{aligned}$$

を得る。

$$\begin{aligned}\tan 2x &= \frac{\tan x + \tan x}{1 - \tan x \tan x} = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2 \cdot 5}{24} = \frac{5}{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan 4x &= \frac{2 \tan 2x}{1 - \tan^2 2x} = \frac{2 \cdot \frac{5}{12}}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} \\ &= \frac{2 \cdot 5 \cdot 12}{12^2 - 5^2} = \frac{120}{119}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(4x-y) &= \frac{\tan 4x - \tan y}{1 + \tan 4x \tan y} = \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119} \cdot \frac{1}{239}} \\ &= \frac{120 \cdot 239 - 119}{119 \cdot 239 + 120} = \frac{28561}{28561} = 1\end{aligned}$$

- 値の計算でも $\tan 2x, \tan 4x$ と順番に計算していった様に、範囲のチェックも順番に行う。

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{ と}$$

$$0 < \tan x = \frac{1}{5} < 1$$

より

$$0 < x < \frac{\pi}{4}$$

が成立する。 $0 < 2x < \frac{\pi}{2}$ と

$$0 < \tan 2x = \frac{5}{12} < 1$$

より

$$0 < 2x < \frac{\pi}{4}$$

が成立する。 よって

$$0 < 4x < \frac{\pi}{2}$$

が成立する。 $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ と

$$0 < \tan y = \frac{1}{239}$$

より $0 < y < \frac{\pi}{2}$ が成立する。

$$-\frac{\pi}{2} < -y < 0$$

より

$$-\frac{\pi}{2} < 4x - y < \frac{\pi}{2}$$

が得られる。