数学序論演習に対する追加説明#14

- 次の 2 つの問題の違いに注意して下さい。

A: 次の関数を定義に基づき微分せよ。

B: 次の関数を微分せよ。

- 次の解答は A の答えとしては 0 点ですが，B の答えとしては満点です。

$y = \cos 2x$ の導関数を求める。$u = 2x$ とおくと $y = \cos u$ なので

$$(\cos 2x)' = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = -\sin u \cdot 2 = -2\sin 2x$$

- A の答えは次のようになります。

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\cos 2(x+h) - \cos 2x}{h} \\
&= \frac{\cos 2x \cos 2h - \sin 2x \sin 2h - \cos 2x}{h} \\
&= \cos 2x \frac{\cos 2h - 1}{h} - \sin 2x \frac{\sin 2h}{h}
\end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned}
\frac{\cos 2h - 1}{h} &= \frac{(\cos 2h - 1)(\cos 2h + 1)}{h(\cos 2h + 1)} \\
&= -\frac{\sin^2 2h}{h(\cos 2h + 1)} \\
&= -\frac{\sin 2h}{2h}\frac{2\sin 2h}{\cos 2h + 1}
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
(\cos 2x)' &= \lim_{h \to 0} A \\
&= \cos 2x \lim_{h \to 0} -\frac{\sin 2h}{2h}\frac{2\sin 2h}{\cos 2h + 1} - 2\sin 2x \lim_{h \to 0} \frac{\sin 2h}{2h} \\
&= -2\sin 2x
\end{aligned}$$

- ここでは次の問題を考えます。$y = \log x$ を定義に基づいて微分せよ。ただし $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$ を使用してよい。

$$(\log x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}$$

ですが，log のままでは極限は分かりません。分かっている指数関数に直す必要があります。

$\log(x+h)-\log x = k$ とおくと $h \to 0$ のとき $k \to 0$ となる。
$k = \log(x+h)-\log x = \log\dfrac{x+h}{x}$ より $e^k = \dfrac{x+h}{x}$ なので

$$h = x(e^k - 1)$$

となる。よって

$$\begin{aligned}(\log x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}\\ &= \lim_{k\to 0}\frac{k}{x(e^k-1)} = \frac{1}{x}\lim_{k\to 0}\frac{k}{e^k-1}\\ &= \frac{1}{x}\end{aligned}$$