数学序論演習に対する追加説明#15

- パラメータ表示された曲線の概形を描くためには増減表と点のプロットの 2 つが必要である。

- $x = x(t) = t^4 - t^2, y = y(t) = t^3 - t$ で表される曲線の概形を描く。

- 最初に増減表を書く。$x'(t) = 4t^3 - 2t$ なので $x'(t) = 0$ を解いて $t = 0, \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を得る。$y'(t) = 3t^2 - 1$ なので $y'(t) = 0$ を解いて $t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を得る。$x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために, 途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

t		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
x'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$		$\rightarrow$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
曲線	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$

- 特徴的な点を求める。

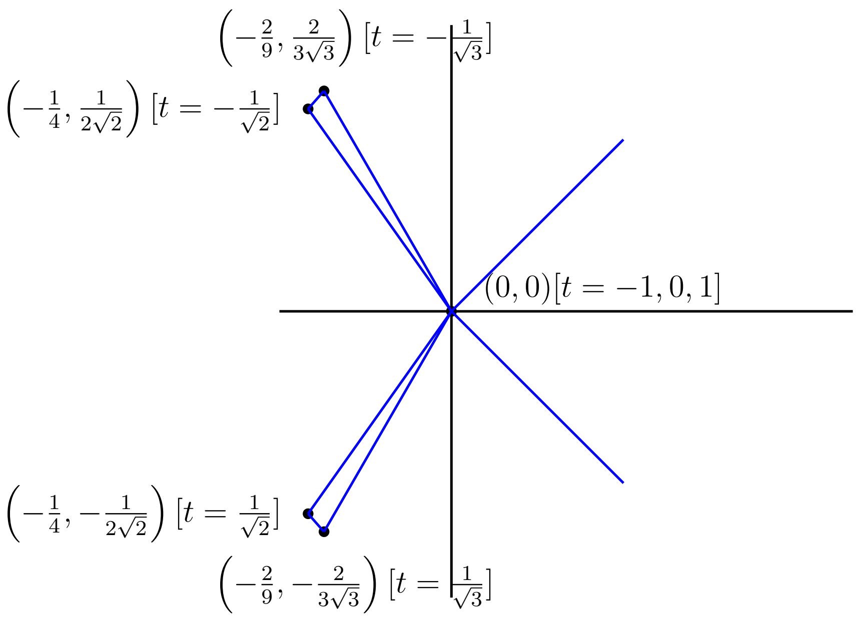
  $x'(t) = 0$ および $y'(t) = 0$ となる点は $\left(x\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), y\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, $\left(x\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(-\dfrac{2}{9}, \dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)$, $(x(0), y(0)) = (0, 0)$, $\left(x\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), y\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left(-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, $\left(x\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(-\dfrac{2}{9}, -\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ である。

  $x(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm 1$ を得る。$(x(0), y(0)) = (0, 0)$, $(x(1), y(1)) = (0, 0)$, $(x(-1), y(-1)) = (0, 0)$ なので y 軸との交点は $(0, 0)$ である。

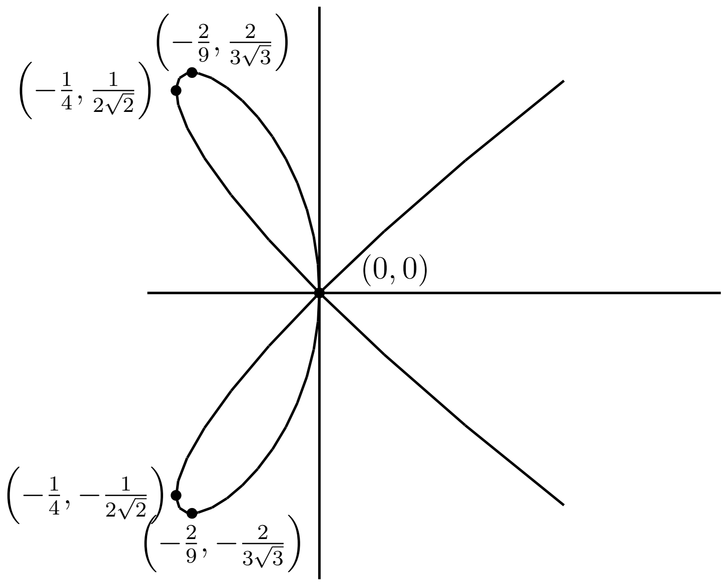
  $y(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm 1$ を得る。x 軸との交点は $(0, 0)$ である。

点は順番に $(0,0)\,[t=-1]\rightarrow \left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)[t=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}]\rightarrow \left(-\dfrac{2}{9},\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)[t=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}]\rightarrow (0,0)\,[t=0]\rightarrow \left(-\dfrac{2}{9},-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)[t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}]\rightarrow \left(-\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)[t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}]\rightarrow (0,0)\,[t=1]$

プロットした点を増減表の曲線の向きを考慮して「直線で結ぶ」と次のようになる。



以上を考慮して曲線の概形を描くと次の様になる。


$\left(-\frac{2}{9}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$
$\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$
$(0,0)$
$\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$
$\left(-\frac{2}{9}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$