数学序論演習に対する追加説明#16

- 不定形の形には見えない極限でも，少し工夫をすることで不定形の極限の議論に持ち込める。ここでは $\lim_{x \to +0} x^x$ の極限を例に考える。

- 関数が $x = a$ で連続とは $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成立することであったが，これを

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(\lim_{x \to a} x)$$

と書き直しておく。すなわち連続関数とは極限をとるという操作と f で移すという操作が**可換**な関数のことである。

- $f(x) = \log x$ とおくと，f は連続関数である。

- $f(x^x)$ の極限を考える。$f(x^x) = \log x^x = x \log x$ なので

$$\lim_{x \to +0} f(x^x) = \lim_{x \to +0} \log x^x = \lim_{x \to +0} x \log x = \lim_{x \to +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}}$$

となり不定形の極限の形なのでロピタルの定理が適用できる。

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \to +0} \frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \to +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= -\lim_{x \to +0} x = 0 \end{aligned}$$

- $f(x) = \log x$ は連続関数なので

$$0 = \lim_{x \to +0} \log(x^x) = \log\left(\lim_{x \to +0} x^x\right)$$

を得る。

- $f(x) = \log x$ は単射なので

$$\log 1 = 0 = \log\left(\lim_{x \to +0} x^x\right)$$

より

$$\lim_{x \to +0} x^x = 1$$

となる。