数学序論要綱 #5

2　集合と写像

現代数学では「数学的対象」はすべて集合と考える。集合は種々の数学的対象から諸特徴を取り除いていったときに残る共通部分のようなものである。簡単な概念に見えるが，逆説的にいうと，簡単だから難しいともいえる。

次は,「数学辞典」(岩波書店) に書いてある集合の (素朴な) 定義だが，なんとも歯切れの悪い表現になっており，これでは集合というものが何なのか良くわからない。

> 直観または思考の対象のうちで一定範囲にあるものを 1 つの全体として考えたとき，それを (それらの対象の) **集合** (*set*) といい，その範囲内の個々の対象をその集合の**元** (*element*) または **要素** という。

「数学入門辞典」(岩波書店) には次のように書かれている。

> 集合とは，はっきりと区別できる「もの」の集まりである。集合 A を構成する「もの」を元または要素という。

しかし,「もの」というものが明確でないのでやはりよく分からない。

集合の定義を厳密にしようと試みると種々の難しい問題が発生することが知られている。ここでは集合を数学的対象の集まりで，その集合に属しているかいないかが**確定しているもの**と考えることにする。たとえば「10 以下の自然数」の集合はその集合に属しているものは確定している。「背の高い人」というと「背が高い」かどうかが確定しているわけではないので,「背の高い人の集合」は集合とはいえない。

集合の本当の定義というのは当然あるのだが，それを厳密に書くと，もっとわけがわからなくなるので，ここではとにかく，範囲の「確定」している何かを集めたらそれは集合だ，と思っていてもらえればよい。

2.1　集合の表し方

集合の表し方としては 2 通りの方法がある。まず第 1 の方法は，その元を全て列挙するというものである。たとえば「10 以下の自然数」の集合 A は

$$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$$

と表す。一般に，元が有限個であれば，集合を表すとき，それをすべて並べて括弧でくくって表す。

自然数全体の集合のように，無限個の元を含んでいるような集合の場合，全ての元を列挙するのは不可能なので，

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \cdots \}$$

などと，ちょっとごまかして書いたりする[1]。この $\mathbb{N}$ という記号は，自然数全体の集合を表すものとして，数学において，標準的に使われているものである。数の集合を表す他の標準的な記号としては (すでに出てきているが)，

- 整数全体の集合 $\mathbb{Z} = \{ \cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots \}$
- 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$
- 実数全体の集合 $\mathbb{R}$
- 複素数全体の集合 $\mathbb{C}$

などがある。

A を集合とする。a が A の元である，ということを，

$$\boxed{a \in A \text{ または } A \ni a}$$

という記号で表す。a は A の元ではない，ということは，

$$a \notin A \text{ または } A \not\ni a$$

という記号で表す。「元である」という意味の「$\in$」が集合においては**最も基本的な概念**であり，**重要である**ことは注意しておこう。

A を「10 以下の自然数」の集合とすると

$$1 \in A, \quad A \ni 3$$

[1] 一般に「$\cdots$」という記号が用いられているときは,「ちょっとごまかし」があると考えてよい。数学では「$\cdots$」を用いずに書くことは必ずできる。だが実際にそのことを遂行するのに理論的負荷がかかる場合もある。自然数を「$\cdots$」を定義することは可能であり「ペアノの公理」として知られている。

であり,

$$0 \notin A, \quad A \not\ni 17$$

である。

元を1つも含まないものも集合として扱う。これを $\emptyset$ または $\{\ \}$ という記号で表し**空集合** (*empty set*) という。

集合を扱うときは,「ある条件満たすようなもの全体の集まり」というものを考えることが多い。集合を表す第2の方法は，その集合の元が満たすべき条件を指定する，というものである。

すなわち，$P(x)$ を命題関数とし，$P(x)$ が 真 となるような対象 x 全体の集合を

$$\{\, x \mid P(x) \,\}$$

で表す。$\{\, x\, ;\, P(x) \,\}$ と書く流儀もあるが，この講義では $\{\, x \mid P(x) \,\}$ を用いる。

特に，$P(x)$ が集合 A の要素 x に関する命題関数とする時，$P(x)$ が 真 となるような A の要素 x 全体の集合を

$$\boxed{\{\, x \in A \mid P(x) \,\}}$$

で表す。即ち $\{\, x \in A \mid P(x) \,\} = \{\, x \mid P(x) \wedge x \in A \,\}$ である。

先ほどでてきた「10以下の自然数」の集合 A は自然数の中で10以下という性質をもつ元の集まりなので

$$A = \{\, a \in \mathbb{N} \mid a \leqq 10 \,\}$$

という書き方ができる。$\mathbb{Z}$ を整数全体のつくる集合とするとき，

$$A = \{\, a \in \mathbb{Z} \mid 1 \leqq a,\ a \leqq 10 \,\}$$

とも書ける (通常は $A = \{\, a \in \mathbb{Z} \mid 1 \leqq a \leqq 10 \,\}$ と略記する)。このように集合を現す記号の中でカンマは**「かつ」の意味にとる**ものと約束する。

例 2.1

(1) 正の実数全体の集合は，$\{\, x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \,\}$ と表される。

(2) 偶数である自然数全体の集合は，$\{\, 2, 4, 6, 8, \cdots \,\}$ と書いても大体意味は通じる。しかし厳密に言うと，これでは 8 の後にどのような数が来るのかはわからない。

上の定義に従って，$\{\, n \in \mathbb{N} \mid n$ は偶数$\,\}$ と書いた方が，正確ではある。「偶数」という概念が既知でない場合は

$$\{\, n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} \ \ n = 2k \,\}$$

と書いてもよい。しかし，ちょっと変則的ではあるが，

$$\{\,2k \mid k \in \mathbb{N}\,\}$$

と書いた方が，集合を用いて何か議論するときに有用であり，このような表現の方がよく使われる。

要は，縦棒の左側にその集合の要素を書き，右側にその要素が満たすべき条件を書く，ということである。この場合 k の代わりに j を用いて $\{\,2j \mid j \in \mathbb{N}\,\}$ としても同じ集合を表す；即ち $\{\,2k \mid k \in \mathbb{N}\,\} = \{\,2j \mid j \in \mathbb{N}\,\}$ である。

4 で割ると余りが 3 である自然数全体の集合を同じ様に表そう。集合は $\{\,3, 7, 11, 15, \cdots\,\}$ となっている。4 で割って 3 余る自然数を n とすると，ある整数 k が存在して，

$$n = 4k + 3$$

となっている。よって $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{Z}\, n = 4k + 3\}$ と表すことができるが，前述の形にはなっていない。$\{\,4k + 3 \mid k \in \mathbb{Z}\,\}$ では負の数が含まれているし，$\{\,4k + 3 \mid k \in \mathbb{N}\,\}$ では 3 が含まれない。そこで k を $k-1$ に変えた表現を考える。$4(k-1)+3 = 4k-1$ なので

$$\{\,4k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\,\}$$

が求めるものである。

この表し方では余りが 3 であることがすぐには分かりにくいので，

$$\{\,4k + 3 \mid k \in \mathbb{N}\text{または k=0}\,\}$$

としてもよいし，

$$\{\,4k + 3 \mid k \in \mathbb{Z}, k \geqq 0\,\}$$

でもよい。

演習問題 2.1　次の集合を表せ。ただし例 2.1 (2) の形で表示せよ。

(1) 5 の倍数となるような自然数全体の集合

(2) 3 で割ると余りが 2 となるような自然数 全体の集合

(3) 5 で割ると余りが 3 となるような自然数 全体の集合

(4) 3 で割ると余りが 2 であり，5 で割ると余りが 3 となるような自然数全体の集合
(ヒント：この集合の元はある数 (15 かな?) で割ると余りがある数である。)

2.2 集合の包含関係と同等性

定義 2.2

(1) 2つの集合 A，B に対し，集合 B の任意の元が集合 A の元であるとき，即ち

$$\forall b \quad (b \in B \implies b \in A)$$

が成立するとき

$$B \subseteq A, \qquad \text{または} \quad A \supseteq B$$

と書いて，B は A の**部分集合** (subset) であるという。「B は A に含まれる」という言い方もする。

(2) $B \subseteq A$ かつ $A \subseteq B$ が成り立つとき，2つの集合は等しいと定義し，$A = B$ と書く。

(3) $B \subseteq A$ かつ $A \neq B$ のとき B は A の**真部分集合** (proper subset) であるといい，

$$B \subsetneqq A, \qquad \text{または} \quad A \supsetneqq B$$

などと書く。$B \subseteq A$ と書いたときは，B が A の真部分集合かもしれないし，$B = A$ かもしれない。

3つ注意をする。a が集合 A の元であるという記号 $a \in A$ と，集合 B が集合 A の部分集合であるという記号 $B \subseteq A$ はどちらも「含まれる」という表現をすることがあるので，**混同しない**こと。一方は集合と元の関係，他方は集合と集合の関係であることを意識すること。

2つ目は集合間の関係で基本的なのは「 $=$ 」ではなく「 $\subseteq$ 」であるということである。集合に対し $A = B$ を示すためには $A \subseteq B$ かつ $A \supseteq B$ の2つを示す必要がある。

最後は記号上の注意。部分集合と真部分集合の記号はいくつかの流儀が混在しているので注意が必要である。集合に関する本を見ると次の表の A および B が多い。記号は記号にすぎないので，何が使われているかを意識して使用すれば混乱することはない。そうはいっても，同じ記号が別の意味に使われるのは混乱を生むこともあるので，この講義では C の記号を使用する。

	A	B	C
部分集合	$\subseteq$	$\subset$	$\subseteq$
真部分集合	$\subset$	$\subsetneqq$	$\subsetneqq$

例 2.3

(1) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

(2) $\{\,4k \mid k \in \mathbb{N}\,\} \subseteq \{\,2k \mid k \in \mathbb{N}\,\}$

演習問題 2.2　次の集合 A に対しその部分集合をすべて列挙せよ。

(1) $A = \{\,1, 2\,\}$　　(2) $A = \{\,1, 2, 3\,\}$

(3) $A = \{\,1, 2, 3, 4\,\}$

演習問題 2.3

(1) 例 2.3 の (2) を証明せよ。

(2) $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ ではないことを定義に基づいて証明せよ。

(3) $\mathbb{N} = \mathbb{Z}$ ではないことを定義に基づいて証明せよ。

2.3　集合演算

定義 2.4　A, B を集合とする。

$$A \cup B = \{\,x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\,\}$$

を A と B の **和集合** (*union*) という。

$$A \cap B = \{\,x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\,\}$$

を A と B の **共通部分** (*intersection*) という。集合の記号内ではカンマ「 , 」を「かつ」の意味のとるという約束の元では (**そして通常の記法ではそのように約束した。**) $\{\,x \mid x \in A\ , x \in B\,\}$ と書いてもよい。

$$A \cap B = \emptyset$$

のとき A と B は**互いに素** (*disjoint*) であるという。

演習問題 2.4　次の A, B, C に関し $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $A \cap C$, $A \cup C$,$(A \cap B) \cap C$,$(A \cup B) \cup C$ を求めよ。また $A \cap (B \cup C)$,$(A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C)$,$(A \cup B) \cap (A \cup C)$ を求めよ。

(1) $A = \{\,1, 2, 3, 4\,\}$,$B = \{\,1, 3, 5, 6\,\}$,$C = \{\,1, 2, 6, 7\,\}$

(2) $A = \{\,1, 2, 3, 4, 5\,\}$,$B = \{\,1, 2, 3\,\}$,$C = \{\,5, 6, 7\,\}$

(3) $A = \{\,1, 2, 3, 4\,\}$,$B = \{\,1, 3, 5\,\}$,$C = \{\ \}$

演習問題 2.5　A, B, C を集合とする。

(1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

を証明せよ。(これを集合の分配法則と呼ぶ。)

[**ヒント：**] これらは，２つの集合が等しい，ということを示す問題である。２つの集合 X, Y が $X = Y$ である，ということの定義は,「 $X \subseteq Y$ かつ $Y \subseteq X$ 」ということだったので，$X = Y$ を示せ，ということは,「 $X \subseteq Y$ かつ $Y \subseteq X$ 」を示せ，ということである。

$X \subseteq Y$ の定義は,「 X の全ての元が Y に含まれる 」ということだったので，上の問題 (1) について言うならば,

$x \in A \cap (B \cup C)$ ならば $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ であることを示し，$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ならば $x \in A \cap (B \cup C)$ であることを示せば良い，ということになる。

定義 2.5

(1) A および B を集合とするとき

$$A - B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$$

と定義し，A と B の**差集合** (*difference set*) という。$A - B$ を $A \backslash B$ と書くこともある。

(2) ある集合 X があって，全ての議論が X の中で行われる，ということを前提としているとき，X を **全体集合** (*total set*) または**普遍集合** (*universal set*) という。

X が全体集合のとき，部分集合 $A \subseteq X$ に対して，$X - A$ を A^c と書き A の **補集合** (*complement*) という。$A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}$ である。

(3) 対象 a, b の**順序対** (orderd pair) を (a, b) で表す。$a = c$ かつ $b = d$ のとき $(a, b) = (c, d)$ であると決める。集合 A, B に対して，$a \in A$, $b \in B$ の順序対 (a, b) の全体からなる集合を $A \times B$ で表して，集合 A, B の **直積集合** (*direct product*) という。

(4) 同様に，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ を集合とした時,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in A_i \quad (1 \leqq i \leqq n)\}$$

を $A_1, A_2, \cdots, A_n$ の積集合という。

$\mathbb{R}$ は実数全体の集合，$\mathbb{C}$ は複素数全体の集合であった。n 個の $\mathbb{R}$ の積集合を $\mathbb{R}^n$, n 個の $\mathbb{C}$ の積集合を $\mathbb{C}^n$ と書く。

$\mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ なので，２つの実数 x, y のペア (x, y) というもの全体の集まりである。(x, y) は平面上の点と見なすことができるの

で，$\mathbb{R}^2$ は平面上の点全体の集合と見なすことができ，2 次元平面と同一視することができる。同様に，$\mathbb{R}^3$ は 3 次元空間と見なすことができる。

演習問題 2.6　演習問題 2.4 の集合 A, B に対し $A - B$, A^c, $A \times B$ を求めよ。ただしここで全体集合は $X = \{1, 2, \ldots, 7\}$ とする。

演習問題 2.7　X を全体集合とし A と B をその部分集合とするとき，次を証明せよ。

(1) $B \subseteq A \iff B^c \supseteq A^c$

(2) De Morgan の法則

$$\begin{aligned} (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \\ (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c \end{aligned}$$

論理と集合との間に成立する関係を見よう。U を全体集合とする。U の部分集合 P および Q がある条件 $p(x)$ および $q(x)$ を用いて

$$P = \{x \in U \mid p(x)\} \quad Q = \{x \in U \mid q(x)\}$$

と書かれているとする。このとき

$$\begin{aligned} P \cap Q &= \{x \in U \mid p(x) \wedge q(x)\} \\ P \cup Q &= \{x \in U \mid p(x) \vee q(x)\} \\ P^c &= \{x \in U \mid \neg p(x)\} \end{aligned}$$

が成立する。また

$$\forall x \in U \quad (p(x) \implies q(x))$$

が成立する必要十分条件は

$$P \subseteq Q$$

が成立することである。この対応関係があるので命題 1.1 の (4)，(5) も，演習問題 2.7 の (2) も共に De Morgan の法則と呼ばれる。

このように集合と命題とは密接な関係にあるが，別物なので，区別することが必要である。2 つを混同して命題 P, Q に対し $P \wedge Q$ のつもりで $P \cap Q$ と書いたり，集合 P, Q に対し $P \cup Q$ のつもりで $P \vee Q$ と書く答案も見られるので注意すること。