数学序論要綱 #11

4.4 対数関数

$a \neq 1$ を正の実数として $f(x) = a^x$ を指数関数とする。指数関数の性質のところで述べたように，$f : \mathbb{R} \longrightarrow (\,0, \infty\,)$ は単調増加かまたは単調減少であるので単射である。また，$a > 1$ のときは $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ であり，$0 < a < 1$ のときは $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$ となり，$(\,0, \infty\,)$ の全ての値をとるので全射である。よって，全単射である。

従って，逆関数 $f^{-1} : (\,0, \infty\,) \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在する。この関数を $\log_a x$ と書き，a を**底** とする**対数関数** という。

$$y = a^x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \log_a y$$

指数法則より，次が成り立つ。

命題 4.13 (1) $\log_a 1 = 0$，$\log_a a = 1$ が成り立つ。
(2) 任意の正の実数 p, q に対して次が成り立つ。

$$\log_a pq = \log_a p + \log_a q$$

(3) 任意の正の実数 p と任意の実数 c に対して次が成り立つ。

$$\log_a p^c = c \log_a p$$

(4) (底の変換) 1 ではない任意の正の実数 a, b と任意の正の実数 p に対して次が成り立つ。

$$\log_a p = \frac{\log_b p}{\log_b a}$$

証明 **(1)** $a^0 = 1$ より，対数の定義を用いると $0 = \log_a 1$ となる。$a^1 = a$ より $1 = \log_a a$ となる。
(2) a^x という関数は任意の正の実数をその値として持つから，任意の正の実数 p, q に対してある実数 s, t があって $p = a^s$, $q = a^t$ となる。指数法則から，$r = a^{s+t}$ とおくと，$r = a^{s+t} = a^s a^t = pq$ である。また，対数関数の定義から，$s = \log_a p$, $t = \log_a q$, $s + t = \log_a r = \log_a pq$ であるから，$\log_a r = \log_a pq = \log_a p + \log_a q$ となる。

(3) $p = a^s$ とする。指数法則から $p^c = (a^s)^c = a^{cs}$ であるから，$\log_a p^c = cs = c\log_a p$ が成り立つ。
(4) $b^u = p, b^v = a$ とすると $\log_b p = u, \log_b a = v$ である。

$$p = b^u = b^{\frac{u}{v}\cdot v} = (b^v)^{\frac{u}{v}} = a^{\frac{u}{v}}$$

であるから，

$$\log_a p = \frac{u}{v} = \frac{\log_b p}{\log_b a}$$

となる。∎

この命題から次がわかる。

系 4.14 **(1)** $\log_a \dfrac{1}{p} = -\log_a p$.
(2) $\log_a \dfrac{p}{q} = \log_a p - \log_a q$

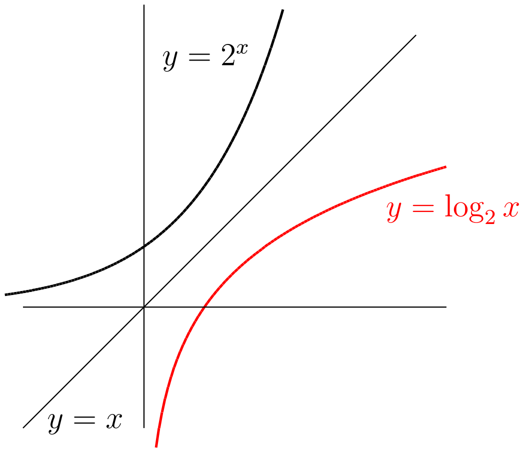
このように対数は，積の計算が和の計算に置き換わる，という画期的な性質を持っている。計算機などはなく，全てを手計算で行っていた時代では，これによる恩恵は，計り知れないものがある。対数は，スコットランドのジョン・ネイピア (1550–1617) とスイスのヨプスト・ビュルギ (1552–1652) によって同じ頃に発見されたと言われているが，世に知られて，広く使われるようになったのは，ネイピアによる著作「対数の驚くべき規則の叙述」(1614 年) と「対数の驚くべき規則の構成」(1619) による。これらの本の中には，ネイピアが 20 年かけて計算した詳細な対数表が含まれており (もちろん全て手計算であるにもかかわらず，ほとんど誤りがなかった)，その後のあらゆる分野における数値計算の労力を劇的に軽減した。その意味でネイピアは，その後の科学技術の発展に多大な貢献をなしたと言える。(実際にはその後，ヘンリー・ブリッグズ，アドリアン・ヴラックらがネイピアとの議論に基づいて対数表を改良し，より詳細な表を作って 1628 年に発表した。その対数表は 20 世紀に至るまで，ほとんど全ての対数表の基礎となった。)

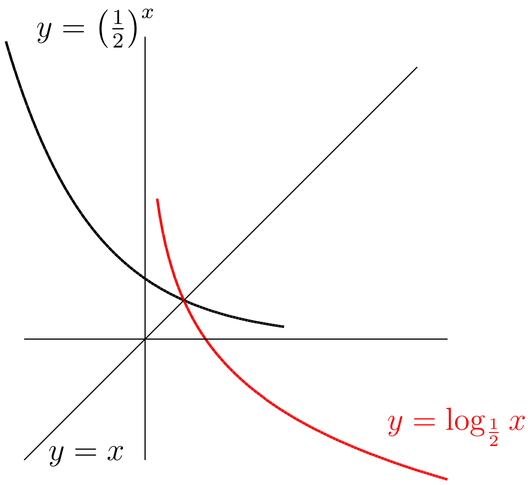
ちなみに，自然対数の底 e を **ネイピアの定数** というが，実際，彼が最初に考えた対数は，e という数を意識はしていなかったが，基本的には自然対数であった。その後，より計算に便利な，10 を底とする常用対数を提案するようになる。

演習問題 4.9
(1) a, b, c を正の実数とする。$a^b = c^{b\log_c a}$ を示せ。

(2) a, b, c を正の実数とする。$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ を示せ。

対数関数のグラフ　対数関数は指数関数の逆関数なので，そのグラフは，対応する指数関数のグラフを $y = x$ に関して対称に写せばよい。





4.5　逆三角関数

三角関数 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を考えてみよう。逆関数は，全単射になっていなければ定義できないが，$\sin x$, $\cos x$ は実数全体で定義された関数と見なすと単射ではない。そこで，逆関数を考えるためには，定義域を限定して，全単射になるような部分だけを取り出す必要がある。

$\sin x$ や $\cos x$ がその上で全単射になるような区間は無数にあり，そのうちのどれを採用したとしても，そこに限定した $\sin x$ や $\cos x$ は，当然，逆関数を持つ。そのような区間として，最も「標準的な」ものとしては，次のようなものが考えられる。

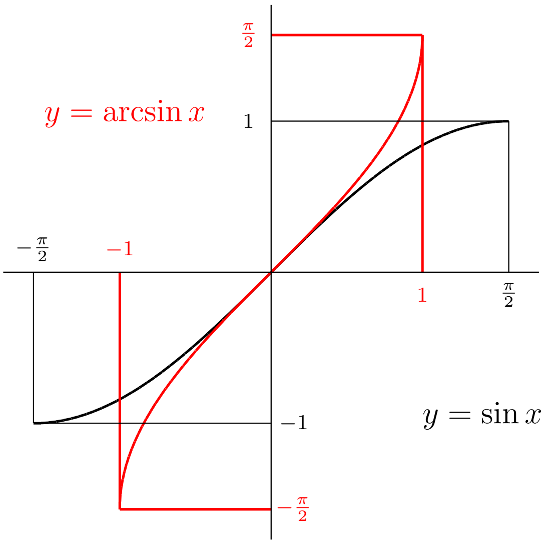
$f(x) = \sin x$ とする。この関数の定義域を $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right]$ に制限した関数 f (名前を変更する必要があるかもしれないが，ここでは混同して用いる) を

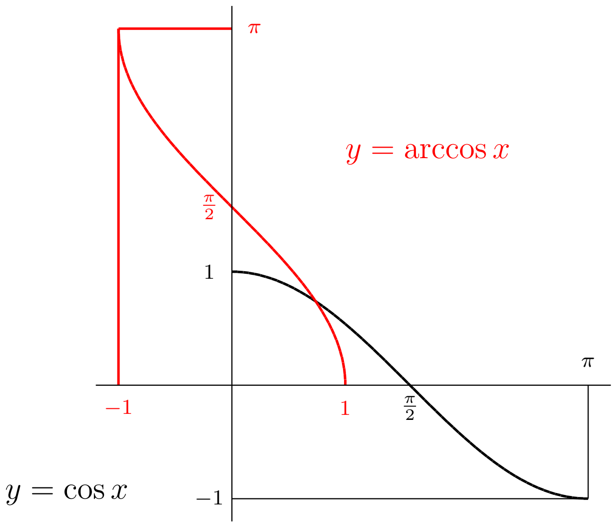
$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \longrightarrow [\,-1,\ 1\,]$$

とすると，f は全単射になる。従って，逆関数

$$f^{-1} : [\,-1,\ 1\,] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

が存在する。これを $\arcsin x$ と書く (**アークサイン** と読む)。$\sin^{-1} x$ という記法も用いられるが，誤解を生みやすい記号なのでこの講義では採用しないことにする。





$g(x) = \cos x$ とする。この関数の定義域を $[\,0,\,\pi\,]$ に制限した関数 g (名前を変更する必要があるかもしれないが，ここでは混同して用いる) を

$$g : [\,0,\,\pi\,] \longrightarrow [\,-1,\,1\,]$$

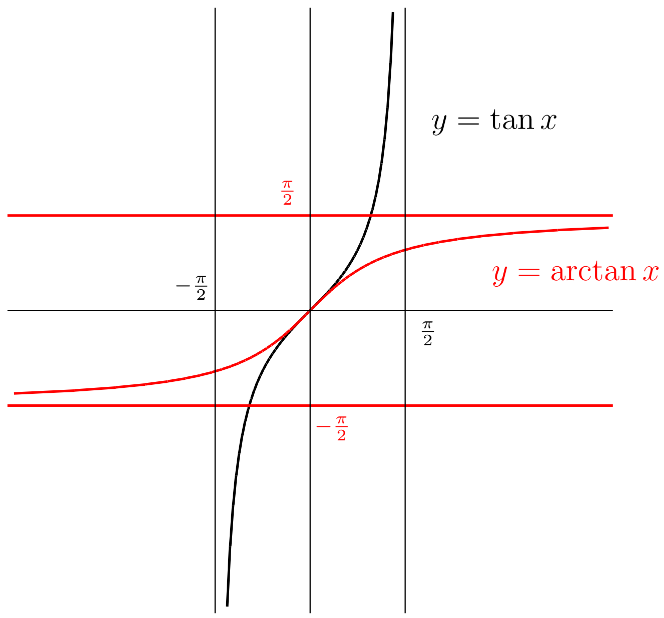
とすると，g は全単射になる。従って，逆関数

$$g^{-1} : [\,-1,\,1\,] \longrightarrow [\,0,\,\pi\,]$$

が存在する。これを $\arccos x$ と書く (**アークコサイン**と読む)。$\cos^{-1} x$ という記法も用いられるが，誤解を生みやすい記号なのでこの講義では採用しないことにする。

$\tan x$ は $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ から $\mathbb{R}$ への全単射であるから，$\mathbb{R}$ から $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ への逆関数が存在する。これを $\arctan x$ などと書き，**アークタンジェント** x と読む。$\tan^{-1} x$ という記法も用いられるが，誤解を生みやすい記号なのでこの講義では採用しないことにする。

$\arctan x$ は実数全体で定義された関数なので，$\dfrac{\pi}{2} + n\pi$ という点で値が定義されない $\tan x$ と比べると，どうちらかと言うと，より「まともな」関数である，という見方もできる。



もう一度逆三角関数の定義を書いておく。

$$
\begin{array}{rcll}
y = \arcsin x & \iff & x = \sin y & (-\dfrac{\pi}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}) \\
y = \arccos x & \iff & x = \cos y & (0 \leqq y \leqq \pi) \\
y = \arctan x & \iff & x = \tan y & (-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2})
\end{array}
$$

演習問題 4.10

(1) 次の値を求めよ。

$$\arcsin \frac{1}{2}, \quad \arccos \frac{1}{2}, \quad \arctan 1, \quad \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \arctan \sqrt{3}, \quad \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2) 次の式を証明せよ。

(1) $\arccos\dfrac{4}{5} = \arcsin\dfrac{3}{5}$

(2) $\arcsin\dfrac{3}{5} + \arcsin\dfrac{5}{13} = \arcsin\dfrac{56}{65}$

(3) $\arccos\dfrac{24}{25} + \arccos\dfrac{12}{13} = \arcsin\dfrac{204}{325}$

(4) $4\arctan\dfrac{1}{5} - \arctan\dfrac{1}{239} = \dfrac{\pi}{4}$

(3) 次の式を簡単にせよ。

(1) $\arctan 2 + \arctan 3$

(2) $\arcsin\dfrac{5}{13} + \arcsin\dfrac{12}{13}$

(4) 方程式 $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \arctan x$ をみたす x を求めよ。

(5) $-1 \leqq x \leqq 1$ の時，$\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(6) $x > 0$ の時，$\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(7) $\arctan x = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ を示せ。