

演習問題 1.4 次の命題の否定命題をつくれ。また真偽を判定せよ。ここで \mathbb{R} は実数全体からなる集合であり、 \mathbb{C} は複素数全体からなる集合とする。

- (1) $\forall x \in \mathbb{R} \ x^2 \geq 0$ (2) $\forall x \in \mathbb{C} \ x^2 \geq 0$
 (3) $\forall x \in \mathbb{R} \ x^4 - x^2 + \frac{1}{4} \geq 0$ (4) $\forall x \in \mathbb{R} \ x^4 - x^2 + \frac{1}{5} \geq 0$
 (5) $\exists x \in \mathbb{R} \ x^4 - x^2 + \frac{1}{5} \leq 0$ (6) $\exists x \in \mathbb{R} \ (x - 2x^2 > 0 \wedge x < 0)$

(1) 否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{R} \ x^2 < 0$ 」である。任意の実数に対し $x^2 \geq 0$ が成立するので 1.4 (1) は正しい命題であり、否定命題は正しくない命題である。

(2) 否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{C} \ x^2 < 0$ 」である。複素数 i は $i^2 = -1 < 0$ なので否定命題は正しい命題である。よって 1.4 (2) は偽である。

(3) 否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{R} \ x^4 - x^2 + \frac{1}{4} < 0$ 」である。 $x^4 - x^2 + \frac{1}{4} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ なので 1.4 (3) は正しい命題であり、否定命題は正しくない命題である。

(4) 否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{R} \ x^4 - x^2 + \frac{1}{5} < 0$ 」である。 $x^4 - x^2 + \frac{1}{5} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{20}$ が成立する。 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ とすると、 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{5} = -\frac{1}{20} < 0$ となるので否定命題は正しい命題である。よって 1.4 (4) は偽である。

(5) 否定命題は「 $\forall x \in \mathbb{R} \ x^4 - x^2 + \frac{1}{5} > 0$ 」である。(4) の(反)例は(5)の例にもなっているので、1.4 (5) は正しい。

(6) 否定命題は「 $\forall x \in \mathbb{R} \ (x - 2x^2 \leq 0 \vee x \geq 0)$ 」である。 $x - 2x^2 = x(1 - 2x) > 0 \iff 0 < x < \frac{1}{2}$ なので $x - 2x^2 > 0$ かつ $x < 0$ となる実数 x は存在しない。よって 1.4 (6) は偽である。

演習問題 1.5 a, b は与えられた実数とする。

$$\forall x \in \mathbb{R} \ a < x \implies b < x$$

の否定命題をつくれ。またこの命題の意味を考えることにより、 a と b がどのような関係にあるとき真になるか考察せよ。また

$$\forall x \in \mathbb{R} \ a > x \implies b > x$$

についても同様に否定命題をつくり考察せよ。

命題「 $\forall x \in \mathbb{R} \ a < x \implies b < x$ 」を P とする。否定命題 $\neg P$ は

$$\exists x \in \mathbb{R} \ a < x \wedge x \leq b$$

である。

否定命題 $\neg P$ が正しいとき $a < b$ が成立する。逆に $a < b$ が正しいとき $x = \frac{a+b}{2}$ とおくと x は $a < x < b$ を満たす。このとき $\neg P$ も真であることが分かる。よって「 $a < b$ 」という命題を

P_1 とおくと

$$P_1 \equiv \neg P$$

が成立する。同値な命題の否定命題は同値なので

$$\neg P_1 \equiv P$$

が成立する。以上によりもとの命題 P は「 $a < b$ 」の否定、即ち「 $a \geq b$ 」と同値であることが分かる。

命題「 $\forall x \in \mathbb{R} a > x \implies b > x$ 」を Q とする。否定命題 $\neg Q$ は

$$\exists x \in \mathbb{R} a > x \wedge x \geq b$$

である。

否定命題 $\neg Q$ が正しいとき $a > b$ が成立する。逆に $a > b$ が正しいとき $x = \frac{a+b}{2}$ とおくと $a > x > b$ をみただけ。このとき $\neg Q$ は真である。よって
よって「 $a > b$ 」という命題を Q_1 とおくと

$$Q_1 \equiv \neg Q$$

が成立する。同値な命題の否定命題は同値なので

$$\neg Q_1 \equiv Q$$

が成立する。以上によりもとの命題 Q は「 $a > b$ 」の否定、即ち「 $b \geq a$ 」と同値であることが分かる。

演習問題 1.6 「 $P(x, y) : x > y$ 」とするとき「 $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} P(x, y)$ 」と「 $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} P(x, y)$ 」の真偽を考察せよ。

「任意」と「存在」の入った命題を考えるときは、相手と2人ゲームをやっていると考えるのも1つの方法である。「任意」は相手が指定してくるもの、「存在」は自分が指定するものと考えて $P(x, y)$ が成立したら自分の勝ちと考えるわけである。前者の「 $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} P(x, y)$ 」は相手が先手で何か x を指定してくるのに対し $x > y$ が成立するように y を選べるかという問題である。後者は最初に自分でうまく y を選んで相手が x をどのようにえらんでも $x > y$ を成立させることができるかという問題である。

前者は任意の x に対し $y = x - 1$ を選ぶことができる。前者は正しい命題である。後者は自分が y をどのように選んでも、相手が $x = y - 1$ を選ぶと $x > y$ を成立させることができない。よって後者は間違った命題である。

後者を示すのに否定命題「 $\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} x \leq y$ 」を考えそれが真であることを示してもよい。

演習問題 1.7 次の命題の否定命題をつくれ。またもとの命題の真偽を確かめよ。

(1) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} x < y$

(2) $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} x < y$

(3) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} x < y$

(4) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} x < y$

(5) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} x^2 + y^2 \geq 0$

(6) $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} x^2 + y^2 = 0$

命題の真偽を調べるときは、元の命題の真偽を調べてもよいし、否定命題の真偽を調べてもよい。どちらか一方の真偽を調べれば十分である。

- (1) 否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} x \geq y$ 」である。 $x = 1, y = 0$ を選べば否定命題は成立する。よって元の命題は正しくない。
- (2) 否定命題は「 $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} x \geq y$ 」である。 $x = 0, y = 1$ を選べば元の命題が正しいことが分かる。
- (3) 否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} x \geq y$ 」である。最初は元の命題；任意の実数 x に対し $y = x + 1$ とおく。このとき $x < y$ が成立するので元の命題は正しい命題であることが分かる。
- (4) 否定命題は「 $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} x \geq y$ 」である。任意の実数 x に対し $y = x$ を選ぶと否定命題の成立が分かる。よって元の命題は正しくない。
- (5) 否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} x^2 + y^2 < 0$ 」である。任意の実数 x に対し $x^2 \geq 0$ が成立する。同様に任意の実数 y に対し $y^2 \geq 0$ が成立する。よって $x^2 + y^2 \geq 0$ が成立するので元の命題は正しい。
- (6) 否定命題は「 $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} x^2 + y^2 \neq 0$ 」である。 $x = 0, y = 0$ を選ぶと $x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 = 0$ で元の命題が正しいことが分かる。

演習問題 1.8 次のベクトルの組が \mathbb{R}^2 または \mathbb{R}^3 を生成するかどうか調べよ。

$$(1) \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2) \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$(3) \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

要綱では解析の過程と証明の両方を述べたが、ここでは証明のみ述べる。解析は各自すること。

- (1) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を \mathbb{R}^2 の任意のベクトルとする。 $a_1 = \frac{2y-x}{3}, a_2 = \frac{2x-y}{3}$ とおくと

$$\begin{aligned} a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2 &= \frac{2y-x}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2x-y}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{x} \end{aligned}$$

なので $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ は \mathbb{R}^2 を生成する。

- (2) 背理法で示す。 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ が \mathbb{R}^2 を生成すると仮定する。このとき $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対し

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x} = a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2 = a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

となる実数 a_1, a_2 が存在する。このとき

$$2 = 2a_1 + 4a_2 = \frac{2}{3}(3a_1 + 6a_2) = \frac{2}{3} \cdot 0 = 0$$

となり、 $2 = 0$ となるが、これは矛盾。よって \mathbb{R}^2 を生成しない。

(3) $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を \mathbb{R}^3 の任意のベクトルとする。 $a_1 = y - z, a_2 = y - x, a_3 = x + z - y$ とおくと

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= (y - z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (y - x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x + z - y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (y - z) + (x + z - y) \\ (y - z) + (y - x) + (x + z - y) \\ (y - x) + (x + z - y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \end{aligned}$$

となる。よって x_1, x_2, x_3 は \mathbb{R}^3 を生成する。

(4) 背理法で示す。 x_1, x_2, x_3 が \mathbb{R}^3 を生成すると仮定する。 $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対し

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

を満たす実数 a_1, a_2, a_3 が存在する。このとき

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1 \tag{1}$$

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \tag{2}$$

$$a_1 + 3a_2 + 5a_3 = 0 \tag{3}$$

が成立する。(2) と (3) より $a_2 = -2a_3$ が得られる。これを (1) に代入すると $a_1 - a_3 = 1$ が、(2) に代入すると $a_1 - a_3 = 0$ が得られる。よって $1 = 0$ が成立するので矛盾。よって x_1, x_2, x_3 は \mathbb{R}^3 を生成しない。