数学序論問題解説 #6

河野

演習問題 2.8　$A=\{1,2\}$ とする。定義域および終域がともに A である写像をすべて列挙せよ。その中で単射であるものをすべて挙げよ。また全射であるものをすべて挙げよ。

A から A への写像 f_1 を $f_1(1)=1, f_1(2)=1$ で定義する。以下同様に $f_2(1)=1, f_2(2)=2, f_3(1)=2, f_3(2)=1. f_4(1)=2, f_4(2)=2$ として f_2, f_3, f_4 を定義する。この 4 つが A から A への写像のすべてである。

ここで単射，全射の否定命題も述べておく。写像 $f:A\longrightarrow B$ が単射であることの定義は

$$\forall a_1, a_2 \in A \;\; a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$$

だったので，否定は

$$\exists a_1, a_2 \in A \;\; a_1 \neq a_2 \wedge f(a_1) = f(a_2)$$

である。写像 $f:A\longrightarrow B$ が全射であることの定義は $f(A)=B$ であるが，実際は $f(A)\supseteq B$ が成立すればよいので

$$\forall b \in B \; \exists a \in A \;\; b = f(a)$$

だったので，否定は

$$\exists b \in B \; \forall a \in A \;\; b \neq f(a)$$

である。

f_1 は $b=2$ とすると，任意の $a\in A$ に対し $f_1(a)=1\neq b(=2)$ が成立するので全射ではない。f_4 は $b=1$ とすると，任意の $a\in A$ に対し $f_4(a)=2\neq b(=1)$ が成立するので全射ではない。

f_1 は $1\neq 2$ かつ $f_1(1)=f_1(2)$ が成立するので単射ではない。f_4 は $1\neq 2$ かつ $f_4(1)=f_4(2)$ が成立するので単射ではない。

残りの f_2 及び f_3 は全単射である。最初に f_2 に関して示す。A(終域の方) から任意に元 b をとってくる。このとき $b=1$ または $b=2$ である。$b=1$ の場合は $a=1$ とおくと $f_2(a)=b$ が成立している。$b=2$ の場合は $a=2$ とおくと $f_2(a)=b$ が成立している。いずれの場合も $f_2(a)=b$ となる元 a が存在するので全射である。

任意の $a_1,a_2\in A$ に対し $a_1\neq a_2$ とすると，a_1,a_2 の可能性は $(a_1,a_2)=(1,2)$ または $(a_1,a_2)=(2,1)$ である。いずれの場合も $f_2(a_1)\neq f_2(a_2)$ となるので f_2 は単射である。

次は f_3 について示す。A(終域の方) から任意に元 b をとってくる。このとき $b=1$ または $b=2$ である。$b=1$ の場合は $a=2$ とおくと $f_3(a)=b$ が成立している。$b=2$ の場合は $a=1$ とおくと $f_3(a)=b$ が成立している。いずれの場合も $f_3(a)=b$ となる元 a が存在するので全射である。

任意の $a_1,a_2\in A$ に対し $a_1\neq a_2$ とすると，a_1,a_2 の可能性は $(a_1,a_2)=(1,2)$ または $(a_1,a_2)=(2,1)$ である。いずれの場合も $f_3(a_1)\neq f_3(a_2)$ となるので f_3 は単射である。

演習問題 2.9　$A=\{1,2,3\}$ とする。定義域および終域がともに A である写像で単射であるものををすべて列挙せよ。また全射であるものをすべて列挙せよ。

ここでは結果のみを書く。理解があやふやだと思うものは，前問を参考に証明をつけてみよ。

$$f_1(1)=1, \quad f_1(2)=2, \quad f_1(3)=3$$

として f_1 を定義する。以下

$$\begin{aligned} f_2(1)&=1, & f_2(2)&=3, & f_2(3)&=2 \\ f_3(1)&=2, & f_3(2)&=1, & f_3(3)&=3 \\ f_4(1)&=2, & f_4(2)&=3, & f_3(3)&=1 \\ f_5(1)&=3, & f_5(2)&=1, & f_5(3)&=2 \\ f_6(1)&=3, & f_3(2)&=2, & f_3(3)&=1 \end{aligned}$$

で f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 を定義する。これらが全単射であり，他の関数は全射でも単射でもない。

演習問題 ***2.10**　$\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への写像で全射であるが，単射でないものをあげよ。また $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への写像で単射であるが，全射でないものをあげよ。

前問及び前々問で気がついた人もいたかもしれないが，A が有限集合のときは，A から A への写像は全射ならば単射であるし，単射ならば全射であることが知られている。しかし無限集合ではこのことは成立しない。この問題は「その例を作れ」という問題である。例は沢山あるのでここで示した例でなくとも勿論よい。

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ を次のように定義する；$f(1)=1$ であり，$n>1$ に対しては $f(n)=n-1$ とする。任意の自然数 n に対し $a=n+1$ とおくと $f(a)=n$ となるので f は全射である。また $1 \neq 2$ であるが，$f(1)=f(2)$ なので単射ではない。よって f は全射であるが単射ではない。

$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ を $g(n)=2n$ と定義する。$b=1 \in \mathbb{N}$ とすると任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $f(n)=2n \neq 1$ なので g は全射ではない。任意の $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ に対し $g(n_1)=g(n_2)$ とすると $2n_1=2n_2$ より $n_1=n_2$ となる。よって g は単射である。よって g は単射であるが全射ではない。

演習問題 2.11

(1) 例 2.9 (1) において $f(\mathbb{R})=\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqq 0\}$ が成立することを示せ。ただし，関数 $f(x)=\sqrt{x}$ が存在することは既知としてよい。

(2) 例 2.9 (3) において $f([\,0, \infty\,))=[\,0, \infty\,)$ が成立することを示せ。ただし，関数 $f(x)=\sqrt{x}$ が存在することは既知としてよい。

(3) 例 2.9 (5) の f が全射でないことを示せ。$\sqrt{2}$ が有理数でないことは既知としてよい。

(1)　$\forall y \in f(\mathbb{R})$ に対し $\exists x \in \mathbb{R} \;\; y=f(x)$ が成立している。x は実数なので $x^2 \geqq 0$ である。よって $y \geqq 0$ より，$y \in \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqq 0\}$ となり，$f(\mathbb{R}) \subseteq \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqq 0\}$ が成立する。

$\forall y \in \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqq 0\}$ とする。$y \geqq 0$ なので $x=\sqrt{y}$ とおくと，$f(x)=x^2=\left(\sqrt{y}\right)^2=y$ となるので，$y \in f(\mathbb{R})$ であり，$\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqq 0\} \subseteq f(\mathbb{R})$ が成立する。以上により $f(\mathbb{R})=\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqq 0\}$ が成立する。

(2)　$\forall y \in f([\,0, \infty\,))$ に対し $\exists x \in \mathbb{R} \;\; x \geqq 0 \wedge y=f(x)$ が成立している。x は実数なので $x^2 \geqq 0$ である。よって $y \geqq 0$ より，$y \in [\,0, \infty\,)$ となり，$f([\,0, \infty\,)) \subseteq [\,0, \infty\,)$ が成立する。

$\forall y \in [\,0, \infty\,)$ とする。$y \geqq 0$ なので $x = \sqrt{y}$ とおくと，$f(x) = x^2 = \left(\sqrt{y}\right)^2 = y$ となるので，$y \in f([\,0, \infty\,))$ であり，$[\,0, \infty\,) \subseteq f([\,0, \infty\,))$ が成立する。以上により $f([\,0, \infty\,)) = [\,0, \infty\,)$ が成立する。

(3) 全射でないことを示すためには $f(A) \neq A$ であることを示せばよい。$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqq 0\}$ なので $2 \in A$ である。このとき $2 \notin f(A)$ を示す。$f(A) = \left\{ y \in A \,\middle|\, \exists x \in A \; y = f(x) = x^2 \right\}$ なので，$2 \in f(A)$ とすると，ある $x \in A$ が存在して $2 = x^2$ となる。$x \geqq 0$ より $x = \sqrt{2}$ となるので $\sqrt{2} = x \in \mathbb{Q}$ となり矛盾。よって $2 \notin f(A)$ である。

演習問題 *2.12 演習問題 2.11 において関数 $y = \sqrt{x}$ の存在を仮定したが，厳密に考えると，これは正しくない。$y = \sqrt{x}$ は例 2.9 (4) の関数 $y = x^2$ の逆関数として定義されるもので，後で見るように逆関数が定義されるためには全単射であることが必要である。$f(x)$ の全単射が証明されてからでないと存在が保障されない $y = \sqrt{x}$ を使って $f(x)$ の全単射を証明することは循環論法になる。

そこで，$y = \sqrt{x}$ を使用しないで，例 2.9 (1) に関して $f(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqq 0\}$ が成立することを示せ。ただし，中間値の定理 ($[a, b]$ で定義された連続関数は $f(a)$ と $f(b)$ の間の値 α に対し $\alpha = f(x)$ となる c $(a < c < b)$ が存在する) は仮定してよい。

連続関数は後で定義するが，定義域の各点 a で $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成立する関数である。$y = f(x) = x^2$ が連続関数であることは既知とする。

$f(\mathbb{R}) \subseteq \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqq 0\}$ は演習問題 2.9 (1) と同様である。$\forall y \in \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqq 0\}$ とすると $y \geqq 0$ が成立している。$y \leqq 1$ のときは $y^2 \leqq 1$ であり，$y \geqq 1$ のときは $y \leqq y^2$ である。よって $a = 0, b = \max\{y, 1\}$ とおくと，$f(a) = 0 \leqq y \leqq b^2 = f(b)$ が成立している。$y = 0$ のときは $x = 0$ とおけば $y = f(x)$ は成立しているので，$y > 0$ とする。$y = b^2 = f(b)$ のときは $y = b = 1$ なので $x = 1$ とおけば $y = f(x)$ は成立している。よって $f(a) < y < f(b)$ とする。このとき中間値の定理より $\exists c \in \mathbb{R} \;\; y = f(c)$ となる。いずれの場合も $y = f(x)$ となる x が存在するので $y \in f(\mathbb{R})$ となり，$\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqq 0\} \subseteq f(\mathbb{R})$ が成立する。

演習問題 2.13 $f : A \longrightarrow B$ が単調増加 $(\forall x_1, x_2 \in A \; x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2))$ のとき単射であることを示せ。

x_1, x_2 を A の任意の元とする。$x_1 \neq x_2$ とすると $x_1 < x_2$ または $x_1 > x_2$ が成立する。$x_1 < x_2$ のときは $f(x_1) < f(x_2)$ であり，$x_1 > x_2$ のときは $f(x_1) > f(x_2)$ である。いずれの場合も $f(x_1) \neq f(x_2)$ が成立するので f は単射である。

演習問題 2.14 $f : A \longrightarrow B, \; g : B \longrightarrow C$ とする。

(1) f と g が単射ならば，$g \circ f : A \to C$ も単射であることを証明せよ。

(2) f と g が全射ならば，$g \circ f : A \to C$ も全射であることを証明せよ。

ヒント：単射と全射の定義が満たされることを示せば良い。

(1) x_1, x_2 を A の任意の元とする。$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \implies x_1 = x_2$ を証明すれば $g \circ f$ が単射であることが示される。$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ なので $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ が成立しているとすると，$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ が成立する。g は単射なので $f(x_1) = f(x_2)$ が得られる。更に f が単射なので $x_1 = x_2$ となり $g \circ f$ が単射であることが分かる。

(2) 任意の $z \in C$ に対し元 $x \in A$ が存在して $z = (g \circ f)(x)$ が成立することを示せばよい。z を C の任意の元とする。g は全射なので $y \in B$ が存在して $z = g(y)$ が成立する。f は全射なので y に対し $x \in A$ が存在して $y = f(x)$ が成立する。以上により $x \in A$ が見つかった。このとき $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ となる。よって $g \circ f$ は全射であることが分かる。

演習問題 2.15 X, Y を集合とし，$f : X \longrightarrow Y$ とする。A, B を X の部分集合とする。
(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ を証明せよ。
(2) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ を証明せよ。
(3) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ とはならない例を挙げよ。
ヒント： (1), (2) については，問題 2.5 のヒントを参照。(3) については，そういう例を作れば良い。

ここで $f(A)$ の定義をもう一度書いておく。$f : X \longrightarrow Y$ と $A \subseteq X$ に対し

$$f(A) = \{\, f(x) \mid x \in X \,\} = \{\, y \mid \exists x \in X \ \ y = f(x) \,\}$$

であった，A という元を f で写したものでないことに注意。

(1) 最初に $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$ の成立を示す。y を $f(A \cup B)$ の任意の元とする。$f(A \cup B)$ の定義から (ここが分からない人は $f(A)$ の定義をもう一度確認してきちんと理解すること)，元 $x \in A \cup B$ が存在して $y = f(x)$ となる。$x \in A$ の場合 $y \in f(A)$ となる (しつこいようだが分からない人は $f(A)$ の定義の確認を)。$f(A) \subseteq f(A) \cup f(B)$ より $y \in f(A) \cup f(B)$ が成立する。$x \in B$ の場合 $y \in f(B)$ となる ((しつこい)^2 ようだが分からない人は $f(A)$ の定義の確認を)。$f(B) \subseteq f(A) \cup f(B)$ より $y \in f(A) \cup f(B)$ が成立する。いずれの場合も $y \in f(A) \cup f(B)$ となるので $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$ が成立する。

次に $f(A \cup B) \supseteq f(A) \cup f(B)$ の成立を示す。y を $f(A) \cup f(B)$ の任意の元とする。$y \in f(A)$ の場合は $\exists x \in A \ y = f(x)$ となる。$A \subseteq A \cup B$ より $x \in A \cup B$ となるので $y \in f(A \cup B)$ が成立する。$y \in f(B)$ の場合は $\exists x \in B \ y = f(x)$ となる。$B \subseteq A \cup B$ より $x \in A \cup B$ となるので $y \in f(A \cup B)$ が成立する。いずれの場合も $y \in f(A \cup B)$ となるので $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$ が成立する。以上により $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ が成立する。

(2) y を $f(A \cap B)$ の任意の元とする。このとき $x \in A \cap B$ が存在して $y = f(x)$ となる。$A \cap B \subseteq A$ より $x \in A$ となる。よって $y \in f(A)$ が成立する。$A \cap B \subseteq A$ より $x \in B$ となる。よって $y \in f(B)$ が成立する。よって $y \in f(A) \cap f(B)$ となるので $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ が成立する。

(3) 等号が成立しない状況を分析することで例を作れる。例えば $A \cap B = \emptyset$ だが $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$ のような例を作れば等号が成立しない例になる。$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定義する。$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$，$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ とすると $A \cap B = \emptyset$ なので $f(A \cap B) = \emptyset$ である。$f(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$，$f(B) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$ なので $f(A) \cap f(B) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$ となる。この例の場合 $f(A \cap B) \subsetneq f(A) \cap f(B)$ となっている。