数学序論問題解説 #7

河野

演習問題 3.1　次の計算をせよ。

(1) $(3+5i)+(4-7i)$

(2) $(2+3i)(3-4i)$

(3) $\dfrac{5+3i}{1+2i}$

(4) $\dfrac{1}{5-2i}$

(1) $7-2i$

(2) $18+i$

(3) $\dfrac{5+3i}{1+2i}=\dfrac{(5+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{11}{5}-\dfrac{7}{5}i$

(4) $\dfrac{1}{5-2i}=\dfrac{5+2i}{(5-2i)(5+2i)}=\dfrac{5}{29}+\dfrac{2}{29}i$

演習問題 3.2　命題 3.2 を証明せよ。

$\alpha=a+bi$, $\alpha_1=a_1+b_1i$, $\alpha_2=a_2+b_2i$ とおく。

(1) $\overline{\alpha}=a-bi=a+(-b)i$ なので，$\overline{\overline{\alpha}}=a-(-b)i=a+bi=\alpha$ となる。

(2) $\alpha_1+\alpha_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$ なので

$$
\begin{aligned}
\overline{\alpha_1+\alpha_2} &= \overline{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i} \\
&= (a_1+a_2)-(b_1+b_2)i \\
&= a_1-b_1i+a_2-b_2i \\
&= \overline{\alpha_1}+\overline{\alpha_2}
\end{aligned}
$$

(3) $\alpha_1\cdot\alpha_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$ なので

$$\overline{\alpha_1\cdot\alpha_2} = \overline{(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i}=(a_1a_2-b_1b_2)-(a_1b_2+a_2b_1)i$$

であるが,

$$\overline{\alpha_1}\cdot\overline{\alpha_2} = (a_1-b_1i)\cdot(a_2-b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)-(a_1b_2+a_2b_1)i$$

となるので $\overline{\alpha_1\cdot\alpha_2}=\overline{\alpha_1}\cdot\overline{\alpha_2}$ が成立する。

(4)

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

なので

$$\overline{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)-(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

となる。一方

$$\frac{\overline{\alpha_1}}{\overline{\alpha_2}} = \frac{a_1-b_1i}{a_2-b_2i}=\frac{(a_1-b_1i)(a_2+b_2i)}{(a_2-b_2i)(a_2+b_2i)}==\frac{(a_1a_2+b_1b_2)-(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

となるので

$$\overline{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)} = \frac{\overline{\alpha_1}}{\overline{\alpha_2}}$$

が成立する。

演習問題 3.3　次の問いに答えよ。

(1) $\alpha = 0 \iff |\alpha| = 0$ を証明せよ。
(2) $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha||\beta|$ を示せ。

(1)　$\alpha = a_1 + a_2 i$ とおくと $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ なので

$$\alpha = 0 \iff a_1 = 0 \text{ かつ } a_2 = 0 \iff a_1^2 + a_2^2 = 0 \iff |\alpha| = 0$$

となり成立する。
(2)　$\alpha = a_1 + b_1 i,\ \beta = a_2 + b_2 i$ とおくと

$$\alpha \cdot \beta = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

なので

$$\begin{aligned}
|\alpha \cdot \beta|^2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 \\
&= a_1^2 a_2^2 - 2 a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + 2 a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2^2 b_1^2 \\
&= a_1^2 (a_2^2 + b_2^2) + b_1^2 (a_2^2 + b_2^2) \\
&= (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \\
&= (|\alpha|\,|\beta|)^2
\end{aligned}$$

となる。$|\alpha \cdot \beta| \geqq 0,\ |\alpha| \geqq 0,\ |\beta| \geqq 0$ より $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha|\,|\beta|$ となる。
　共役複素数を用いる別解もある。紹介しておこう。$|\alpha|^2 = \alpha\overline{\alpha},\ |\beta|^2 = \beta\overline{\beta}$ なので

$$|\alpha \cdot \beta|^2 = (\alpha\beta)\overline{\alpha\beta} = \alpha\beta\overline{\alpha}\,\overline{\beta} = \alpha\overline{\alpha}\beta\overline{\beta} = |\alpha|^2 |\beta|^2$$

あとは前と同様である。

演習問題 3.4　図 3.1 を参考にして定理 3.3 を証明せよ。

　三角形の 3 辺の長さを a, b, c とすると

$$a < b + c$$

が成立する。この式も三角不等式と呼ばれるが，定理の式との区別のためここでは仮に幾何的三角不等式と呼んでおく。
(1)　$O,\ \alpha,\ \alpha + \beta$ を直線で結んだ図形を考える。これが 3 角形になっている場合を最初に考える。この 3 角形の 3 辺の長さは $|\alpha|,\ |\beta|,\ |\alpha + \beta|$ なので幾何的三角不等式より

$$|\alpha + \beta| < |\alpha| + |\beta|$$

が成立する。

次に O，α，$\alpha+\beta$ を直線で結んだ図形が三角形にならない場合を考える。最初に $\alpha=0$ のとき。このときは

$$|\alpha+\beta|=|0+\beta|=|\beta|=0+|\beta|=|\alpha|+|\beta|$$

となり等号が成立している。$\beta=0$ の場合も同様である。

$\alpha\neq 0$ かつ $\beta\neq 0$ で O，α，$\alpha+\beta$ を直線で結んだ図形が三角形にならないのは O,α,β が一直線に並ぶときのみである。このときは実数 t が存在して $\beta=t\alpha$ と書けている。実数 t に対しては

$$|1+t|\leqq 1+|t|$$

が成立している。このとき

$$\begin{aligned}|\alpha+\beta|&=|\alpha+t\alpha|=|\alpha(1+t)|=|\alpha|\,|1+t|\\&\leqq|\alpha|(1+|t|)=|\alpha|+|\alpha|\,|t|\\&=|\alpha|+|\alpha t|=|\alpha|+|\beta|\end{aligned}$$

となる。以上より不等式の成立が示される。

(2)　$\gamma=\alpha-\beta$ とおいて β,γ に (1) の不等式を適用すると

$$|\beta+\gamma|\leqq|\beta|+|\gamma|$$

が成立する。$\beta+\gamma=\alpha$ なので移行すると (2) 式の成立が分かる。

ここで紹介した証明は幾何的 (図形的) 証明であり，3 角形の辺の和の性質を仮定している。代数的証明も紹介しておこう。シュワルツの不等式は既知とする。

$\alpha=a+ib$，$\beta=c+id$ とおくと $\alpha+\beta=(a+c)+i(b+d)$ なので

$$|\alpha+\beta|^2=(a+c)^2+(b+d)^2,\quad |\alpha|^2=a^2+b^2,\quad |\beta|^2=c^2+d^2$$

となっている。シュワルツの不等式：$(ac+bd)^2\leqq(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ を用いると

$$\begin{aligned}|\alpha+\beta|^2&=(a+c)^2+(b+d)^2=a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2\\&=a^2+b^2+2(ac+bd)+c^2+d^2\\&\leq|\alpha|^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}+|\beta|^2\\&=|\alpha|^2+2|\alpha|\,|\beta|+|\beta|^2=(|\alpha|+|\beta|)^2\end{aligned}$$

となる。$|\alpha+\beta|\geq 0$ なので

$$|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$$

を得る。証明した式において $\alpha\to\alpha-\beta$ という置き換えを行うと (2) の式が得られる。