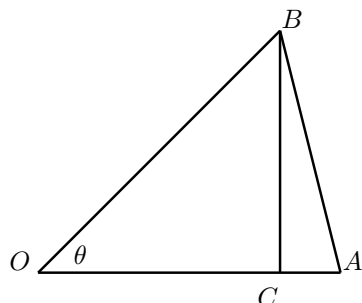


演習問題 4.1 定理 4.1 を証明せよ。



$a = \overline{OA}$, $b = \overline{OB}$, $c = \overline{AB}$ とおく。点 B から直線 OA におろした垂線の足を C とする。また角 $\angle ABC = \varphi$ とおく。このとき $\overline{OC} = b \cos \theta$, $\overline{BC} = b \sin \theta$, $\overline{AC} = c \sin \varphi$, $\overline{BC} = c \cos \varphi$ が成立している。 $a = \overline{OA} = \overline{OC} + \overline{CA} = b \cos \theta + c \sin \varphi$ より $a - b \cos \theta = c \sin \varphi$ と変形して両辺を 2 乗すると

$$a^2 - 2ab \cos \theta + b^2 \cos^2 \theta = c^2 \sin^2 \varphi \quad (6)$$

となる。 $b \sin \theta = \overline{BC} = c \cos \varphi$ の両辺を 2 乗すると

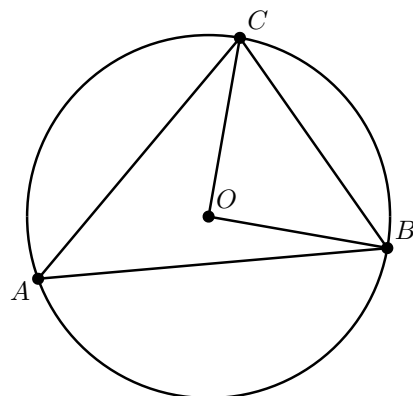
$$b^2 \sin^2 \theta = c^2 \cos^2 \varphi \quad (7)$$

が得られる。(6) 式と (7) 式を加えると

$$a^2 - 2ab \cos \theta + b^2 = c^2$$

となり、定理 4.1 が証明される。

演習問題 4.2 定理 4.2 を証明せよ。



外接円の半径を r とする。円周角 A に対応する中心角は $\angle BOC$ であり、中心角は円周角の 2 倍なので $\angle BOC = 2\angle A$ が成立している。また $\triangle OBC$ は二等辺三角形なので $r \sin A = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{a}{2}$ より

$$\frac{a}{\sin A} = 2r$$

が成立する。他の角についても同様に示すことができる。

演習問題 4.3 上式 (1),(2) を証明せよ。

点 O, A, A', B, C, D, E, F を下図のようにおく。 $x' = \overline{OD} = \overline{OE} - \overline{DE}$ である。

$$\overline{OE} = \overline{OB'} \cos \theta = \overline{OB} \cos \theta = x \cos \theta$$

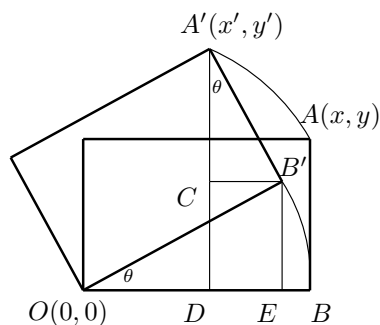
および

$$\overline{DE} = \overline{CB'} = \overline{A'B'} \sin \theta = \overline{AB} \sin \theta = y \sin \theta$$

より

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

が従う。



$y' = \overline{DA'} = \overline{A'C} + \overline{CD}$ である。

$$\overline{A'C} = \overline{A'B'} \cos \theta = \overline{AB} \cos \theta = y \cos \theta$$

および

$$\overline{CD} = \overline{B'E} = \overline{OB'} \sin \theta = x \sin \theta$$

より

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

が従う。

演習問題 4.4 加法定理を用いて以下の公式を示せ。

(1)

$$\begin{aligned} \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) &= \cos x, & \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) &= -\cos x \\ \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) &= -\sin x, & \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) &= \sin x \end{aligned}$$

ここでは2通りの証明方法を紹介しておく。最初に高校でやったような三角関数の加法定理を用いる通常の方法、次にオイラーの公式を用いる方法を紹介する。

$\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ が成立している。

$$\begin{aligned}\sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \cos x \\ &= \sin x \cdot 0 + 1 \cdot \cos x = \cos x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin \left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin \left(x + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \sin x \cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) \cos x \\ &= \sin x \cdot 0 + (-1) \cdot \cos x = -\cos x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x \cos \frac{\pi}{2} - \sin x \sin \frac{\pi}{2} \\ &= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \cos \left(x + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \cos x \cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin x \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot (-1) = \sin x\end{aligned}$$

次がオイラーの公式を用いる証明である。 $\exp \left(i \frac{\pi}{2}\right) = e^{i \frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$,
 $\exp \left(-i \frac{\pi}{2}\right) = e^{-i \frac{\pi}{2}} = \cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$ が成立している。

$$\exp \left(i \left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \exp(ix) \exp \left(i \frac{\pi}{2}\right) = (\cos x + i \sin x)i = -\sin x + i \cos x \quad \text{および}$$

$$\exp \left(i \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

の実部と虚部を比較することにより

$$\cos \left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \quad \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

が得られる。同様に

$$\exp \left(i \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \exp(ix) \exp \left(-i \frac{\pi}{2}\right) = (\cos x + i \sin x)(-i) = \sin x - i \cos x \quad \text{および}$$

$$\exp \left(i \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

の実部と虚部を比較することにより

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x, \quad \sin \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$$

が得られる。

(2)

$$\sin(x \pm \pi) = -\sin x, \quad \cos(x \pm \pi) = -\cos x$$

$\sin \pi = 0$, $\cos \pi = -1$, $\sin (-\pi) = 0$, $\cos (-\pi) = -1$ が成立している。

$$\begin{aligned}\sin(x + \pi) &= \sin x \cos \pi + \sin \pi \cos x \\ &= \sin x \cdot (-1) + 0 \cdot \cos x = -\sin x \\ \sin(x - \pi) &= \sin(x + (-\pi)) \\ &= \sin x \cos(-\pi) + \sin(-\pi) \cos x \\ &= \sin x \cdot (-1) + 0 \cdot \cos x = -\sin x \\ \cos(x + \pi) &= \cos x \cos \pi - \sin x \sin \pi \\ &= \cos x \cdot (-1) + \sin x \cdot 0 = -\cos x \\ \cos(x - \pi) &= \cos(x + (-\pi)) \\ &= \cos x \cos(-\pi) - \sin x \sin(-\pi) \\ &= \cos x \cdot (-1) + \sin x \cdot 0 = -\cos x\end{aligned}$$

次がオイラーの公式を用いる証明である。 $\exp(i\pi) = e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$,
 $\exp(-i\pi) = e^{-i\pi} = \cos(-\pi) + i \sin(-\pi) = -1$ が成立している。

$$\begin{aligned}\exp(i(x + \pi)) &= \exp(ix) \exp(i\pi) = (\cos x + i \sin x)(-1) = -\cos x - i \sin x \quad \text{および} \\ \exp(i(x - \pi)) &= \cos(x - \pi) + i \sin(x - \pi)\end{aligned}$$

の実部と虚部を比較することにより

$$\cos(x + \pi) = -\cos x, \quad \sin(x + \pi) = -\sin x$$

が得られる。同様に

$$\begin{aligned}\exp(i(x - \pi)) &= \exp(ix) \exp(-i\pi) = (\cos x + i \sin x)(-1) = -\cos x - i \sin x \quad \text{および} \\ \exp(i(x - \pi)) &= \cos(x - \pi) + i \sin(x - \pi)\end{aligned}$$

の実部と虚部を比較することにより

$$\cos(x - \pi) = -\cos x, \quad \sin(x - \pi) = -\sin x$$

が得られる。

(3) $\tan x$ の加法定理：

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}, \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}\end{aligned}$$

次を示すために $\theta_1 + \theta_2$ を $\theta_1 - \theta_2$ に変えた場合の加法定理を示しておく。 $\sin(-\theta_2) = -\sin \theta_2$ および $\cos(-\theta_2) = \cos \theta_2$ は既知とする。

$$\begin{aligned}\sin(\theta_1 - \theta_2) &= \sin(\theta_1 + (-\theta_2)) \\ &= \sin \theta_1 \cos(-\theta_2) + \cos \theta_1 \sin(-\theta_2) \\ &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ \cos(\theta_1 - \theta_2) &= \cos(\theta_1 + (-\theta_2)) \\ &= \cos \theta_1 \cos(-\theta_2) - \sin \theta_1 \sin(-\theta_2) \\ &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2\end{aligned}$$

これを用いる。

$$\begin{aligned}\tan(\alpha - \beta) &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}\end{aligned}$$

次がオイラーの公式を用いる証明である。ただし \tan の場合はそれほど有効でないかもしれないが、他でもこの方法を紹介しているので、一応紹介しておこう。最初に

$$\begin{aligned}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})(e^{i\beta} + e^{-i\beta}) + (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})(e^{i\beta} - e^{-i\beta}) &= 2(e^{i(\alpha+\beta)} - e^{-i(\alpha+\beta)}) \\ (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})(e^{i\beta} + e^{-i\beta}) + (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})(e^{i\beta} - e^{-i\beta}) &= 2(e^{i(\alpha+\beta)} + e^{-i(\alpha+\beta)})\end{aligned}$$

が成立することに注意しておく。

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}{\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}$$

が成立しているので、

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{e^{i(\alpha+\beta)} - e^{-i(\alpha+\beta)}}{i(e^{i(\alpha+\beta)} + e^{-i(\alpha+\beta)})} \\ &= \frac{(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})(e^{i\beta} + e^{-i\beta}) + (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})(e^{i\beta} - e^{-i\beta})}{i((e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})(e^{i\beta} + e^{-i\beta}) + (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})(e^{i\beta} - e^{-i\beta}))} \\ &= \frac{\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{i(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})} + \frac{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}{i(e^{i\beta} + e^{-i\beta})}}{1 - \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{i(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})} \frac{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}{i(e^{i\beta} + e^{-i\beta})}} \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}\end{aligned}$$

$\tan(\alpha - \beta)$ は $\tan(\alpha + \beta)$ の公式に

$$\tan(-x) = \frac{e^{i(-x)} - e^{-i(-x)}}{e^{i(-x)} + e^{-i(-x)}} = -\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} = -\tan x$$

を適用しても得られるし、最初に 2 式の β を $-\beta$ に変えた式

$$(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})(e^{i\beta} + e^{-i\beta}) - (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})(e^{i\beta} - e^{-i\beta}) = 2(e^{i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha-\beta)})$$

$$(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})(e^{i\beta} + e^{-i\beta}) - (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})(e^{i\beta} - e^{-i\beta}) = 2(e^{i(\alpha-\beta)} + e^{-i(\alpha-\beta)})$$

を用いて直接計算しても得られる。

(4) 倍角の公式：

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta, \quad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\sin 2\theta = \sin(\theta + \theta) = \sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta$$

$$= 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos(\theta + \theta) = \cos \theta \cos \theta - \sin \theta \sin \theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$= \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$= 2(1 - \sin^2 \theta) - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

次がオイラーの公式を用いる証明である。

$$\exp(i2\theta) = \exp(i\theta)^2 = (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + i2 \sin \theta \cos \theta \quad \text{および}$$

$$\exp(i2\theta) = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$$

の実部と虚部を比較することで得られる。

(5) 3 倍角の公式：

$$\sin 3\theta = -4 \sin^3 \theta + 3 \sin \theta \quad \cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

(4) の式を用いる。

$$\sin 3\theta = \sin(\theta + 2\theta) = \sin \theta \cos 2\theta + \cos \theta \sin 2\theta$$

$$= \sin \theta (1 - 2 \sin^2 \theta) + \cos \theta (2 \sin \theta \cos \theta)$$

$$= \sin \theta - 2 \sin^3 \theta + 2 \sin \theta \cos^2 \theta$$

$$= \sin \theta - 2 \sin^3 \theta + 2 \sin (1 - \sin^2 \theta)$$

$$= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

$$\cos 3\theta = \cos(\theta + 2\theta) = \cos \theta \cos 2\theta - \sin \theta \sin 2\theta$$

$$= \cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1) - \sin \theta (2 \sin \theta \cos \theta)$$

$$= 2 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2 \cos \theta \sin^2 \theta$$

$$= 2 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta)$$

$$= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

次がオイラーの公式を用いる証明である。

$$\begin{aligned}
 \exp(i3\theta) &= \exp(i\theta)^3 = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 \\
 &= \cos^3\theta + 3\cos^2\theta(i\sin\theta) + 3\cos\theta(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3 \\
 &= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta) \quad \text{および} \\
 \exp(i3\theta) &= \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)
 \end{aligned}$$

の実部と虚部を比較する。このとき $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を用いると結果が得られる。

(6) 半角の公式：

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}, \quad \cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

(4) のコサインの倍角公式より従う。 θ を $\frac{\theta}{2}$ で置き換えて

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{2}, \quad \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos\theta}{2}$$

という書き方もされる。

次がオイラーの公式を用いる証明である。

$$\begin{aligned}
 \sin^2\theta &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{i2\theta} - 2 + e^{-i2\theta}}{-4} \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2}\right) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \\
 \cos^2\theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 = \frac{e^{i2\theta} + 2 + e^{-i2\theta}}{4} \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2}\right) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}
 \end{aligned}$$

(7) 和積公式：

$$\begin{aligned}
 \sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \\
 \sin\alpha - \sin\beta &= 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \\
 \cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \\
 \cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$X = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad Y = \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \text{とおくと}$$

$$X + Y = \alpha, \quad X - Y = \beta$$

が成立している。

$$\sin\alpha = \sin(X + Y) = \sin X \cos Y + \cos X \sin Y$$

$$\sin\beta = \sin(X - Y) = \sin X \cos Y - \cos X \sin Y$$

が成立しているので

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= \sin X \cos Y + \cos X \sin Y + \sin X \cos Y - \cos X \sin Y \\ &= 2 \sin X \cos Y = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ \sin \alpha - \sin \beta &= \sin X \cos Y + \cos X \sin Y - (\sin X \cos Y - \cos X \sin Y) \\ &= 2 \cos X \sin Y = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)\end{aligned}$$

が得られる。

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \cos(X + Y) = \cos X \cos Y - \sin X \sin Y \\ \cos \beta &= \cos(X - Y) = \cos X \cos Y + \sin X \sin Y\end{aligned}$$

が成立しているので

$$\begin{aligned}\cos \alpha + \cos \beta &= \cos X \cos Y - \sin X \sin Y + \cos X \cos Y + \sin X \sin Y \\ &= 2 \cos X \cos Y = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ \cos \alpha - \cos \beta &= \cos X \cos Y - \sin X \sin Y - (\cos X \cos Y + \sin X \sin Y) \\ &= -2 \sin X \sin Y = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)\end{aligned}$$

オイラーの公式を用いた証明は、積和公式とまとめて次で行う。

(8) 積和公式：

$$\begin{aligned}\sin \alpha \sin \beta &= -\frac{1}{2} \left\{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \right\} \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} \left\{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \right\} \\ \cos \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} \left\{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \right\} \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} \left\{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \right\}\end{aligned}$$

$A = \alpha + \beta$, $B = \alpha - \beta$ とおくと

$$\alpha = \frac{A + B}{2}, \quad \beta = \frac{A - B}{2}$$

が成立している。すでに示した (7) の式において α , β をそれぞれ A , B に置き換える。(7) の最初の式を置き換えると

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \left(\frac{A + B}{2} \right) \cos \left(\frac{A - B}{2} \right) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

即ち

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \left\{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \right\}$$

が得られる。2 番目の式を置き換えると

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right) = 2 \cos \alpha \sin \beta$$

即ち

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \left\{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \right\}$$

が得られる。3 番目の式を置き換えると

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

即ち

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \left\{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \right\}$$

が得られる。4 番目の式を置き換えると

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right) = -2 \sin \alpha \sin \beta$$

即ち

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \left\{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \right\}$$

が得られる。

次がオイラーの公式を用いる証明である。

$$\begin{aligned} \sin(x+y) \sin(x-y) &= \frac{e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}}{2i} \frac{e^{i(x-y)} - e^{-i(x-y)}}{2i} \\ &= \frac{e^{ix}e^{iy} - e^{-ix}e^{-iy}}{2i} \frac{e^{ix}e^{-iy} - e^{-ix}e^{iy}}{2i} \\ &= -\frac{1}{4} (e^{i2x} - e^{-i2y} - e^{i2y} + e^{-2ix}) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2} - \frac{e^{i2y} + e^{-i2y}}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 2y) \end{aligned}$$

この式において $\alpha = \frac{x}{2}$, $\beta = \frac{y}{2}$ とおくと和積公式の 4 番目の式が得られる。 $\alpha = x+y$, $\beta = x-y$ とおくと積和公式の 1 番目の式が得られる。

$$\begin{aligned}
\sin(x+y)\cos(x-y) &= \frac{e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}}{2i} \frac{e^{i(x-y)} + e^{-i(x-y)}}{2} \\
&= \frac{e^{ix}e^{iy} - e^{-ix}e^{-iy}}{2i} \frac{e^{ix}e^{-iy} + e^{-ix}e^{iy}}{2} \\
&= \frac{1}{4i} (e^{i2x} - e^{-i2y} + e^{i2y} - e^{-2ix}) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i} + \frac{e^{i2y} - e^{-i2y}}{2i} \right) \\
&= \frac{1}{2} (\sin 2x + \sin 2y)
\end{aligned}$$

この式において $\alpha = \frac{x}{2}$, $\beta = \frac{y}{2}$ とおくと和積公式の 1 番目の式が得られる。 $\alpha = x+y$, $\beta = x-y$ とおくと積和公式の 2 番目の式が得られる。

$$\begin{aligned}
\cos(x+y)\sin(x-y) &= \frac{e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)}}{2} \frac{e^{i(x-y)} - e^{-i(x-y)}}{2i} \\
&= \frac{e^{ix}e^{iy} + e^{-ix}e^{-iy}}{2} \frac{e^{ix}e^{-iy} - e^{-ix}e^{iy}}{2i} \\
&= \frac{1}{4i} (e^{i2x} + e^{-i2y} - e^{i2y} - e^{-2ix}) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i} - \frac{e^{i2y} - e^{-i2y}}{2i} \right) \\
&= \frac{1}{2} (\sin 2x - \sin 2y)
\end{aligned}$$

この式において $\alpha = \frac{x}{2}$, $\beta = \frac{y}{2}$ とおくと和積公式の 2 番目の式が得られる。 $\alpha = x+y$, $\beta = x-y$ とおくと積和公式の 3 番目の式が得られる。

$$\begin{aligned}
\cos(x+y)\cos(x-y) &= \frac{e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)}}{2} \frac{e^{i(x-y)} + e^{-i(x-y)}}{2} \\
&= \frac{e^{ix}e^{iy} + e^{-ix}e^{-iy}}{2} \frac{e^{ix}e^{-iy} + e^{-ix}e^{iy}}{2} \\
&= \frac{1}{4} (e^{i2x} + e^{-i2y} + e^{i2y} + e^{-2ix}) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2} + \frac{e^{i2y} + e^{-i2y}}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 2y)
\end{aligned}$$

この式において $\alpha = \frac{x}{2}$, $\beta = \frac{y}{2}$ とおくと和積公式の 3 番目の式が得られる。 $\alpha = x+y$, $\beta = x-y$ とおくと積和公式の 4 番目の式が得られる。