数学序論問題解説 #11　　河野

演習問題 4.9

(1) a, b, c を正の実数とする。$a^b = c^{b\log_c a}$ を示せ。
(2) a, b, c を正の実数とする。$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ を示せ。

対数関数においては次が基本的である。

$$y = \log_a x \iff x = a^y$$

(1) $X = c^{b\log_c a}$ とき，c を底とする対数をとると

$$\log_c X = \log_c c^{b\log_c a} = b\log_c a \log_c c = b\log_c a = \log_c a^b$$

が成立する。$Y = a^b$ とおき，c を底とする対数をとると

$$\log_c Y = \log_c a^b$$

が成立する。よって $\log_c X = \log_c Y$ が成立している。log は単射なので $\log_c X = \log_c Y$ なら $X = Y$ が成立している。よって $a^b = c^{b\log_c a}$ が成立する。
(2) $X = a^{\log_c b}$ とおくと $\log_c X = \log_c a^{\log_c b} = \log_c b \log_c a$ である。$Y = b^{\log_c a}$ とおくと $\log_c Y = \log_c b^{\log_c a} = \log_c a \log_c b$ である。よって $\log_c X = \log_c Y$ が成立するが，log は単射なので $X = Y$ が成立する。

演習問題 4.10

(1) 次の値を求めよ。

$$\arcsin\frac{1}{2},\quad \arccos\frac{1}{2},\quad \arctan 1,\quad \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \arctan\sqrt{3},\quad \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2) 次の式を証明せよ。

(1) $\arccos\frac{4}{5} = \arcsin\frac{3}{5}$

(2) $\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{5}{13} = \arcsin\frac{56}{65}$

(3) $\arccos\frac{24}{25} + \arccos\frac{12}{13} = \arcsin\frac{204}{325}$

(4) $4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$

(3) 次の式を簡単にせよ。

(1) $\arctan 2 + \arctan 3$

(2) $\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{12}{13}$

(4) 方程式 $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \arctan x$ をみたす x を求めよ。

(5) $-1 \leqq x \leqq 1$ の時，$\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(6) $x > 0$ の時，$\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(7) $\arctan x = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ を示せ。

逆三角関数においては次が基本的である。

$$y = \arcsin x \iff x = \sin y \quad (-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2})$$
$$y = \arccos x \iff x = \cos y \quad (0 \leqq y \leqq \pi)$$
$$y = \arctan x \iff x = \tan y \quad (-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$$

(1) $x = \arcsin\dfrac{1}{2}$ とおくと

$$\frac{1}{2} = \sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

なので $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ で $\sin x = \dfrac{1}{2}$ となる x を求めると $x = \dfrac{\pi}{6}$ である。よって $\arcsin\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$ となる。

$x = \arccos\dfrac{1}{2}$ とおくと

$$\frac{1}{2} = \cos x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

なので $x = \dfrac{\pi}{3}$，即ち $\arccos\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$ となる。

$x = \arctan 1$ とおくと

$$1 = \tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

なので $x = \dfrac{\pi}{4}$，即ち $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$ となる。

$x = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

なので $x = \dfrac{\pi}{4}$，即ち $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{4}$ となる。

$x = \arctan\sqrt{3}$ とおくと

$$\sqrt{3} = \tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

なので $x = \dfrac{\pi}{3}$，即ち $\arctan\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$ となる。

$x = \arctan\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

なので $x = \dfrac{\pi}{6}$，即ち $\arctan\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$ となる。

(2)

(1)　$\arccos\dfrac{4}{5}=\alpha$ とおくと

$$\arccos\frac{4}{5}=\alpha \quad\Longleftrightarrow\quad \cos\alpha=\frac{4}{5}\ \ (0\leqq\alpha\leqq\pi)$$

である。ここで $\cos\alpha\geqq 0$ より $\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$ が成立する。

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\left(\frac{3}{5}\right)^2$$

となるが $\sin\alpha\geqq 0$ より $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ となる。$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$ なので $\alpha=\arcsin\dfrac{3}{5}$ となる。よって

$$\arccos\frac{4}{5}=\alpha=\arcsin\frac{3}{5}$$

となる。

(2)　$\alpha=\arcsin\dfrac{3}{5}$ とおくと

$$\sin\alpha=\frac{3}{5}\qquad(-\frac{\pi}{2}\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2})$$

が成立している。$\beta=\arcsin\dfrac{5}{13}$ とおくと

$$\sin\beta=\frac{5}{13}\qquad(-\frac{\pi}{2}\leqq\beta\leqq\frac{\pi}{2})$$

が成立している。ここで $\dfrac{3}{5},\dfrac{5}{13}$ は共に正であり，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より小さいので

$$0<\alpha<\frac{\pi}{4},\qquad 0<\beta<\frac{\pi}{4}$$

が成立していることを注意しておく。このとき $\cos\alpha,\cos\beta$ ともに正なので

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$$

$$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}$$

が成立する。従って

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\frac{12}{13}+\frac{4}{5}\frac{5}{13}=\frac{56}{65}$$

が成立する。最初の注意より $0<\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$ なので $\alpha+\beta=\arcsin\dfrac{56}{65}$ 即ち

$$\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{5}{13}=\arcsin\frac{56}{65}$$

が成立する。

(3)　$\alpha = \arccos\dfrac{24}{25}$，$\beta = \arccos\dfrac{12}{13}$ とおくと

$$\cos\alpha = \frac{24}{25}\ (0 \leqq \alpha \leqq \pi), \qquad \cos\beta = \frac{12}{13}\ (0 \leqq \beta \leqq \pi)$$

が成立している。$\cos\alpha \geqq 0, \cos\beta \geqq 0$ より $\alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}, \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である。よって $\sin\alpha \geqq 0, \sin\beta \geqq 0$ が成立している。

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2 = \left(\frac{7}{25}\right)^2$$
$$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

より $\sin\alpha = \dfrac{7}{25}, \sin\beta = \dfrac{5}{13}$ である。

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{7}{25}\frac{12}{13} + \frac{24}{25}\frac{5}{13} \\ &= \frac{204}{325}\end{aligned}$$

ここからいきなり $\alpha + \beta = \arcsin\dfrac{204}{325}$ としないように !! $\alpha+\beta$ の範囲のチェックを必ずすること。 $0 \leqq \alpha + \beta \leqq \pi$ となるが

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{24}{25}\frac{12}{13} - \frac{7}{25}\frac{5}{13} \\ &= \frac{253}{325} \geqq 0\end{aligned}$$

より $\alpha + \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である。よって

$$\alpha + \beta = \arcsin\frac{204}{325}$$

である。

(4)　$\alpha = \arctan\dfrac{1}{5}$ とおくと $\tan\alpha = \dfrac{1}{5}$ $(-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2})$ であるが，$0 < \tan\alpha < 1$ より $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$ である。

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\frac{1}{5}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{5}{12}\quad (0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2})$$

$$\tan 4\alpha = \frac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha} = \frac{2\frac{5}{12}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119}\quad (0 < 4\alpha < \pi)$$

$$\tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4\alpha - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan 4\alpha\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}\quad (-\frac{\pi}{4} < 4\alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4})$$

ここで $0 < \tan\left(4\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$ より $4\alpha - \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{2}$ である。よって

$$4\alpha - \frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{239}$$

となり式が得られる。

(3)

(1)　$\arctan 2 = \alpha, \arctan 3 = \beta$ とおくと

$$\tan\alpha = 2\ (-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}),\quad \tan\beta = 3\ (-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2})$$

である。$\tan\alpha > 0, \tan\beta > 0$ より $\alpha > 0, \beta > 0$ である。また $\alpha + \beta < \pi$ である。

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{2+3}{1-2\cdot 3} = -1$$

と $0 < \alpha + \beta < \pi$ より $\alpha + \beta = \dfrac{3\pi}{4}$ となるので

$$\arctan 2 + \arctan 3 = \frac{3\pi}{4}$$

(2)　$\arcsin\dfrac{5}{13} = \alpha, \arcsin\dfrac{12}{13} = \beta$ とおくと

$$\sin\alpha = \frac{5}{13}\ (-\frac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}),\qquad \sin\beta = \frac{12}{13}\ (-\frac{\pi}{2} \leqq \beta \leqq \frac{\pi}{2})$$

$\sin\alpha > 0, \sin\beta > 0$ より $0 < \alpha, 0 < \beta$ である。また $\alpha + \beta \leqq \pi$ である。

$$\cos\alpha^2 = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \left(\frac{12}{13}\right)^2$$
$$\cos\beta^2 = 1 - \sin^2\beta = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

と $\cos\alpha \geqq 0, \cos\beta \geqq 0$ より $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}, \cos\beta = \dfrac{5}{13}$ である。

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{5}{13}\frac{5}{13} + \frac{12}{13}\frac{12}{13} = 1$$

となるが $0 \leqq \alpha + \beta \leqq \pi$ より $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ である。よって

$$\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$$

(4)　$y = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ とおくと

$$\cos y = \frac{1}{\sqrt{5}}\qquad (0 \leqq y \leqq \pi)$$

である。また $y = \arctan x$ より

$$\tan y = x$$

なので，

$$\sin y = \tan y \cos y = \frac{x}{\sqrt{5}}$$

となる。$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ に代入すると $1 = \dfrac{1}{5} + \dfrac{x^2}{5}$ より $x^2 = 4$ を得る。

$$\arctan x = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} > 0$$

より $x > 0$ なので $x = 2$ が解である。

(5)　$u = \arcsin x$ とおくと $x = \sin u$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq u \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ であり，$v = \arccos x$ とおくと $x = \cos v$ $(0 \leqq v \leqq \pi)$ である。演習問題 5.3 (1) を用いると

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \sin\left(-\left(v - \frac{\pi}{2}\right)\right) = -\sin\left(v - \frac{\pi}{2}\right) = -\big(-\cos v\big) = \cos v$$

の成立が示される。$0 \leqq v \leqq \pi$ のとき $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \dfrac{\pi}{2} - v \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であり，

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cos v = x = \sin u$$

なので $\dfrac{\pi}{2} - v = u$ となり，$u + v = \dfrac{\pi}{2}$ となる。

(6)　$u = \arctan x$ とおくと $x = \tan u$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}\right)$ である。$x > 0$ より $0 < u < \dfrac{\pi}{2}$ となっている。$v = \arctan \dfrac{1}{x}$ とおくと $\dfrac{1}{x} = \tan v$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < v < \dfrac{\pi}{2}\right)$ である。$\dfrac{1}{x} > 0$ より $0 < v < \dfrac{\pi}{2}$ となっている。演習問題 5.3 (1) を用いると

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cos\left(-\left(v - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(v - \frac{\pi}{2}\right) = \sin v$$

の成立が示される。これより

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - v\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - v\right)} = \frac{\cos v}{\sin v} = \frac{1}{\tan v} = x = \tan u$$

が成立する。u, v ともに $0 < u < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < v < \dfrac{\pi}{2}$ なので $0 < \dfrac{\pi}{2} - v < \dfrac{\pi}{2}$ となり，$\dfrac{\pi}{2} - v = u$ が成立する。

(7)　$u = \arctan x$ とおくと $x = \tan u$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}\right)$ であり，$v = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ とおくと $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sin v$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq v \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ となる。

$$1 + x^2 = 1 + \tan^2 u = 1 + \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} = \frac{\cos^2 u}{\cos^2 u} + \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u}$$

であるが，$-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos u > 0$ なので $\sqrt{1+x^2} = \dfrac{1}{\cos u}$ となる。

$$\sin v = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \cos u \tan u = \sin u$$

であり，$-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq v \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $u = v$ となる。