

演習問題 5.13  $x = a$  で微分可能な関数は  $x = a$  において連続であることを証明せよ。

関数  $f(x)$  が  $x = a$  で微分可能であるとすると,

$$\varepsilon(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$$

とおくとき  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$  が成立している。このとき

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \varepsilon(h)h$$

なので  $x = a+h$  とおくと

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \{f(a) + f'(a)h + \varepsilon(h)h\} = f(a)$$

となるので  $f(x)$  は  $x = a$  で連続である。

演習問題 5.14 定義に基づいて次の関数の導関数を求めよ。

(1)  $f(x) = x$

(2)  $f(x) = x^3$

(3)  $f(x) = x^2 + x + 1$

(4)  $f(x) = a$

(5)  $f(x) = x^4$

(6)  $f(x) = \frac{1}{x}$

(1)

$$(x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

(2)

$$\begin{aligned} (x^3)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \{3x^2 + 3xh + h^2\} = 3x^2 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} (x^2 + x + 1)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + (x+h) + 1 - (x^2 + x + 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h + 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \{2x + h + 1\} = 2x + 1 \end{aligned}$$

(4)

$$(a)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a - a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

(5)

$$\begin{aligned}(x^4)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \{4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3\} \\ &= 4x^3\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x}\right)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{x - (x+h)}{(x+h)x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x+h)x} \\ &= -\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

演習問題 \*5.15 定理 5.14, 5.15 を証明せよ。

最初に定理 5.14 の証明。次が成立することを注意しておく : 「ある  $q(x)$  と  $\varepsilon(x)$  に対し

$$f(x+h) - f(x) = q(x)h + \varepsilon(h)h$$

が成立するとき,  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$  が成立すれば  $f(x)$  は微分可能であり,  $f'(x) = q(x)$  が成立する。

逆に  $f(x)$  が微分可能のとき  $\varepsilon(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)$  とおくと,

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \varepsilon(h)h$$

であり,  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$  が成立する。」

$y = f(x), z = g(y)$  は微分可能なので

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \varepsilon_1(h)h$$

$$g(y+k) - g(y) = g'(y)k + \varepsilon_2(k)k$$

としたとき  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_1(h) = 0, \lim_{k \rightarrow 0} \varepsilon_2(k) = 0$  が成立している。 $f(x+h) - f(x) = k$  とおくと  $\lim_{h \rightarrow 0} k = 0$  である。

$$\begin{aligned}g \circ f(x+h) - g \circ f(x) &= g(f(x+h)) - g(f(x)) \\ &= g(f(x) + k) - g(f(x)) \\ &= g'(y)k + \varepsilon_2(k)k \\ &= g'(y)(f(x+h) - f(x)) + \varepsilon_2(k)(f(x+h) - f(x)) \\ &= g'(y)(f'(x)h + \varepsilon_1(h)h) + \varepsilon_2(k)(f'(x)h + \varepsilon_1(h)h) \\ &= g'(y)f'(x)h + (g'(y)\varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(k)f'(x) + \varepsilon_2(k)\varepsilon_1(h))h\end{aligned}$$

$\varepsilon(h) = g'(y)\varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(k)f'(x) + \varepsilon_2(k)\varepsilon_1(h)$  とおくと

$$g \circ f(x+h) - g \circ f(x) = g'(y)f'(x)h + \varepsilon(h)h$$

となり,  $h \rightarrow 0$  のとき  $\lim_{h \rightarrow 0} k = 0$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_1(h) = 0$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_2(k) = 0$  となるので

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

となる。最初の注意より  $g \circ f(x)$  は微分可能で, 導関数は  $g'(y)f'(x)$  となる。よって

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

が成立する。

次に定理 5.15 を証明する。関数  $f$  と  $f$  の逆関数  $f^{-1}$  を合成した関数は恒等写像である。即ち  $f^{-1} \circ f(x) = x$  となる。  $\frac{dx}{dx} = 1$  なので, 定理 5.14 を適用すると,

$$1 = \frac{dx}{dy} \frac{dy}{dx}$$

となる。これより

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

を得る。

**演習問題 5.16** 任意の自然数  $n$  に対して  $(x^n)' = nx^{n-1}$  が成立する事を数学的帰納法で示せ。

$n = 1$  のとき場合を考える。

$$(x^1)' = x' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1 = 1x^0 = 1x^{1-1}$$

よって  $n = 1$  のとき成立している。

$n = k$  のとき成立を仮定する。即ち  $(x^k)' = kx^{k-1}$  の成立を仮定する。積の微分法を用いると

$$\begin{aligned} (x^{k+1})' &= (x^k \cdot x)' = (x^k)'x + x^k x' \\ &= kx^{k-1}x + x^k \cdot 1 = kx^k + x^k \\ &= (k+1)x^{k+1-1} \end{aligned}$$

よって  $n = k + 1$  のときの成立が示された。数学的帰納法によりすべての  $n$  で成立する。

**演習問題 5.17** 次の有理関数の導関数を求めよ。

$$(1) y = \frac{x-1}{x+1}$$

$$(2) y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

$$(3) y = \frac{1}{x^2+1}$$

(1)

$$\begin{aligned}y' &= \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = (x-1)' \left(\frac{1}{x+1}\right) + (x-1) \left(\frac{1}{x+1}\right)' \\ &= \frac{1}{x+1} + (x-1) \left(\frac{-1}{(x+1)^2}\right) = \frac{2}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

(2) (1) と同様に解いてもよいし,  $y = \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x^2-1+2}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1}$  と変形して

$$y' = \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right)' = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

という計算法もある。

(3)

$$y' = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

演習問題 5.18 次の関数の導関数を定義に基づいて求めよ。ただし次の極限值は用いてよい。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

(1)  $y = x^3$

(2)  $y = \frac{x+1}{x^2+1}$

(3)  $y = \cos 2x$

(4)  $y = \log x$

(1)

$$\begin{aligned}(x^3)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{x+h+1}{(x+h)^2+1}\right) - \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{(x+h+1)(x^2+1) - (x+1)((x+h)^2+1)}{((x+h)^2+1)(x^2+1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-x^2 - 2x + 1 - xh - h)}{h((x+h)^2+1)(x^2+1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-x^2 - 2x + 1 - xh - h}{((x+h)^2+1)(x^2+1)} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(\cos 2x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos 2(x+h) - \cos 2x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos 2x \cos 2h - \sin 2x \sin 2h - \cos 2x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \cos 2x \frac{\cos 2h - 1}{h} - \sin 2x \frac{\sin 2h}{h} \right\} \\ &= \cos 2x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos 2h - 1}{h} - \sin 2x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{h}\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\frac{\cos 2h - 1}{h} = \frac{(\cos 2h - 1)(\cos 2h + 1)}{h(\cos 2h + 1)} = \frac{-\sin^2 2h}{h(\cos 2h + 1)}$$

なので

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos 2h - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 2h}{h(\cos 2h + 1)} \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} 2 \frac{\sin 2h}{2h} \frac{\sin 2h}{\cos 2h + 1} \\ &= -2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{2h} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{\cos 2h + 1} \\ &= -2 \cdot 1 \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

であり、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 \frac{\sin 2h}{2h} = 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{2h} = 2 \cdot 1 = 2$$

なので

$$(\cos 2x)' = -2 \sin 2x$$

となる。

(4)

$$(\log x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h}$$

であるが、ここで  $k = \log(x+h) - \log x$  とおくと  $h \rightarrow 0$  のとき  $k \rightarrow 0$  となる。

$$\log(x+h) - \log x = \log \frac{x+h}{x}$$

なので  $\log \frac{x+h}{x} = k$  より  $e^k = \frac{x+h}{x}$  を得る。これを  $h$  について解くと

$$h = x(e^k - 1)$$

となる。これを代入して次を得る。

$$\begin{aligned}(\log x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{x(e^k - 1)} \\ &= \frac{1}{x} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{e^k - 1} = \frac{1}{x}\end{aligned}$$

演習問題 5.19 次の関数の導関数を求めよ (諸公式を用いてよい)。

(1)  $y = x^2 + 3x + 2$

(2)  $y = 3 \sin x + 2e^x$

(3)  $y = xe^x$

(4)  $y = \sin^{100} 2x$

(5)  $y = x^3 \log(2x^3 + x)$

(6)  $y = \arcsin(x^2 + 1)$

(7)  $y = (x^2 + 2)(x^2 + 3)$

(8)  $y = \sin(3x + 1)$

(9)  $y = e^x \sin x$

(10)  $y = x^x$

(1)

$$(x^2 + 3x + 2)' = 2x + 3$$

(2)

$$(3 \sin x + 2e^x)' = 3 \cos x + 2e^x$$

(3)

$$(xe^x)' = e^x + xe^x$$

(4)

$$(\sin^{100} 2x)' = 200 \sin^{99} 2x \cdot \cos 2x$$

(5)

$$(x^3 \log(2x^3 + x))' = 3x^2 \log(2x^3 + x) + x^3 \frac{6x^2 + 1}{2x^3 + x}$$

(6)

$$(\arcsin(x^2 + 1))' = \frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2 + 1)^2}}$$

(7)

$$\begin{aligned} ((x^2 + 2)(x^2 + 3))' &= (x^2 + 2)'(x^2 + 3) + (x^2 + 2)(x^2 + 3)' \\ &= 2x(x^2 + 3) + 2x(x^2 + 2) = 2x(2x^2 + 5) \end{aligned}$$

(8)

$$(\sin(3x + 1))' = 3 \cos(3x + 1)$$

(9)

$$(e^x \sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x$$

(10) 両辺の対数をとると

$$\log y = \log x^x = x \log x$$

なので両辺を  $x$  で微分すると

$$\frac{dy}{dx} \frac{1}{y} = \log x + x \frac{1}{x} = \log x + 1$$

となる。よって

$$(x^x)' = x^x(\log x + 1)$$

である。

演習問題 5.20 次を示せ。

$$y = \log |x| \quad (x \neq 0) \quad \text{とおくと} \quad y' = \frac{1}{x}$$

$x > 0$  のときはすでに示したように

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

が成立する。

$x < 0$  のとき,  $|x| = -x$  なので,  $u = -x$  とおき合成関数の微分法を用いる。

$$\begin{aligned} (\log |x|)' &= \frac{d \log(-x)}{dx} = \frac{d \log u}{du} \frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{u} (-1) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

いずれの場合も

$$(\log |x|)' = \frac{1}{x}$$

が成立する。

演習問題 5.21 次を示せ。

$$\left\{ x \arctan x - \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) \right\}' = \arctan x$$

$$(x \arctan x)' = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$$

$$\left( \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) \right)' = \frac{x}{x^2 + 1}$$

から命題が示される。

演習問題 5.22 対数微分法をもちいて次の微分をもとめよ。

(1)  $x^{\sin x}$

(2)  $\sqrt{\frac{(x^2 + 2)^2}{(x^2 + 3)^3}}$

(1)  $y = x^{\sin x}$  の両辺の対数を取ると,  $\log y = \log x^{\sin x} = \sin x \log x$  である。この両辺を  $x$  で微分すると

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \cos x \log x + \sin x \frac{1}{x}$$

なので

$$\frac{dy}{dx} = x^{\sin x} \left( \cos x \log x + \sin x \frac{1}{x} \right)$$

が得られる。

(2)  $y = \sqrt{\frac{(x^2 + 2)^2}{(x^2 + 3)^3}}$  の両辺の対数を取ると,

$$\begin{aligned} \log y &= \log \sqrt{\frac{(x^2 + 2)^2}{(x^2 + 3)^3}} = \log \left( \frac{(x^2 + 2)^2}{(x^2 + 3)^3} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{(x^2 + 2)^2}{(x^2 + 3)^3} = \frac{1}{2} \{ \log(x^2 + 2)^2 - \log(x^2 + 3)^3 \} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \log(x^2 + 2) - \frac{1}{2} \cdot 3 \log(x^2 + 3) = \log(x^2 + 2) - \frac{3}{2} \log(x^2 + 3) \end{aligned}$$

である。この両辺を  $x$  で微分すると

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2 + 2} - \frac{3}{2} \frac{2x}{x^2 + 3}$$

なので

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \sqrt{\frac{(x^2 + 2)^2}{(x^2 + 3)^3}} \left( \frac{2x}{x^2 + 2} - \frac{3}{2} \frac{2x}{x^2 + 3} \right) \\ &= \frac{2x}{(x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 3}} - \frac{3x(x^2 + 2)}{(x^2 + 3)^2\sqrt{x^2 + 3}} \end{aligned}$$

が得られる。