数学序論問題解説 #15

河野

演習問題 6.1　次の定理は平均値の定理と呼ばれる。平均値の定理の成立を前提として命題 6.1 を証明せよ。

関数 f が $[\,a,\,b\,]$ で連続であり，$(\,a,\,b\,)$ で微分可能であるとする。このときある実数 c で $a < c < b$ かつ

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を満たすものが存在する。

最初に，$H(x)$ がある区間で恒等的に $H'(x) = 0$ ならば $H(x)$ は定数関数であることを示す。区間の中の実数 a を 1 つ固定する。今 $x > a$ となる区間中の任意の x を考える。$[a, x]$ として平均値の定理を適用すると，ある c で $a < c < x$ かつ

$$H'(c) = \frac{H(x) - H(a)}{x - a}$$

を満たすものが存在する。$H'(c) = 0$ なので $H(x) = H(a)$ が成立する。$x < a$ となる区間中の任意の x を考える。$[x, a]$ として平均値の定理を適用すると，ある c で $x < c < a$ かつ

$$H'(c) = \frac{H(a) - H(x)}{a - x}$$

を満たすものが存在する。$H'(c) = 0$ なので $H(x) = H(a)$ が成立する。$x = a$ のときは $H(x) = H(a)$ である。よって任意の x に対し $H(x) = H(a)$ が成立するので，$H(x)$ は定数関数である。

次に命題 6.1 を証明する。$H(x) = G(x) - F(x)$ とおくと $H'(x) = G'(x) - F'(x)$ より $H'(x) = 0$ となる。よって $H(x)$ は定数関数である。これを $H(x) = C$ とおく。このとき $G(x) - F(x) = H(x) = C$ なので $G(x) = F(x) + C$ が成立する。

演習問題 6.2　命題 6.2 及び命題 6.3 を証明せよ。

命題 6.2 (1) はすでに示してあるので (2) を示す。$F'(x) = f(x)$ とおくと $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx$ である。$(aF(x))' = aF'(x) = af(x)$ なので

$$\int af(x)\,dx = aF(x) = a\int f(x)\,dx$$

となる。

命題 6.3 は微分法で学んだ関数の導関数と積分の定義から出てくる。即ち

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

を示すためには

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

を示せばよい。

(1) は要綱に書いてある。(2) は演習問題 5.15 を参考にすると，$(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$ が成立することから従う。(3)–(8) はそれぞれ $(\sin x)' = \cos x$，$(-\cos x)' = \sin x$，$(e^x)' = e^x$，$\left(\dfrac{a^x}{\log a}\right)' = \dfrac{1}{\log a}\log a\, a^x = a^x$，$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ から結論が得られる。

演習問題 6.3　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $(2x+5)^6$	(2) e^{-2x}	(3) $\sin\dfrac{x}{2}$	(4) $x(3x^2+1)^8$
(5) $\dfrac{x}{(1+x^2)^3}$	(6) xe^{3x}	(7) x^2e^{3x}	(8) $\tan x$
(9) $x\sin x$	(10) $x^2\cos x$	(11) $x^3\log x$	(12) $(\log x)^2$
(13) $\arctan x$	(14) $\arcsin x$	(15) $e^x\sin x$	(16) $e^x\cos x$

(1)　置換積分法を使う。$t = 2x+5$ と置くと $\dfrac{dt}{dx} = 2$ より $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\frac{dt}{dx}} = \dfrac{1}{2}$ となる。よって

$$\begin{aligned}\int (2x+5)^6\,dx &= \int t^6\frac{dx}{dt}\,dt = \int t^6\frac{1}{2}\,dt\\ &= \frac{1}{2\cdot 7}t^7 = \frac{1}{14}(2x+5)^7\end{aligned}$$

(2)　$t = -2x$ とおくと $\dfrac{dt}{dx} = -2$ より $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\frac{dt}{dx}} = -\dfrac{1}{2}$ となる。よって

$$\begin{aligned}\int e^{-2x}\,dx &= \int e^t\frac{dx}{dt}\,dt = -\frac{1}{2}\int e^t\,dt\\ &= -\frac{1}{2}e^t = -\frac{1}{2}e^{-2x}\end{aligned}$$

(3)　$t = \dfrac{x}{2}$ とおくと，$x = 2t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 2$ となる。よって

$$\int \sin\frac{x}{2}\,dx = \int \sin t\frac{dx}{dt}\,dt = -2\cos t = -2\cos\frac{x}{2}$$

となる。

(4)　$t = 3x^2+1$ とおくと $\dfrac{dt}{dx} = 6x$ より $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\frac{dt}{dx}} = \dfrac{1}{6x}$ となる。よって

$$\begin{aligned}\int x(3x^2+1)^8\,dx &= \int xt^8\frac{1}{6x}\,dt = \frac{1}{6}\int t^8\,dt\\ &= \frac{1}{6}\frac{1}{9}t^9 = \frac{1}{54}(3x^2+1)^9\end{aligned}$$

(5) $t=1+x^2$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=2x$ より $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\frac{dt}{dx}}=\dfrac{1}{2x}$ となる。よって

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(1+x^2)^3}\,dx &= \int \frac{x}{t^3}\frac{1}{2x}\,dt=\frac{1}{2}\int \frac{1}{t^3}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)t^{-2}=-\frac{1}{4(1+x^2)^2}\end{aligned}$$

ここから部分積分法の問題がでてくる。部分積分法は

$$\int f'g\,dx=fg-\int f'g\,dx$$

というものであった。

(6) $g=x$, $f'=e^{3x}$ とおくと

$$f=\int f'\,dx=\int e^{3x}\,dx=\frac{1}{3}e^{3x}$$

なので

$$\begin{aligned}\int xe^{3x}\,dx &= \int \left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)' x\,dx=\int f'g\,dx \\ &= fg-\int fg'\,dx \\ &= \frac{x}{3}e^{3x}-\int \frac{1}{3}x^{3x}\,dx=\frac{x}{3}e^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}\end{aligned}$$

(7) $g=x^2$, $f'=e^{3x}$ とおくと

$$f=\int f'\,dx=\int e^{3x}\,dx=\frac{1}{3}e^{3x}$$

なので

$$\begin{aligned}\int x^2e^{3x}\,dx &= fg-\int fg'\,dx \\ &= \frac{x^2}{3}e^{3x}-\int 2x\frac{1}{3}e^{3x}\,dx\end{aligned}$$

ここでもう一度部分積分を実行すると

$$=\left(\frac{x^2}{3}-\frac{2x}{9}+\frac{2}{27}\right)e^{3x}$$

(8) $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=-\dfrac{(\cos x)'}{\cos x}$ なので $t=\cos x$ とおくと, $\dfrac{dt}{dx}=-\sin x$ より $dx=-\dfrac{1}{\sin x}dt$ と変形すると

$$\int \tan x\,dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}\frac{-1}{\sin x}\,dt=-\int \frac{1}{t}\,dt=-\log|\cos x|$$

(9) $g = x$，$f' = \sin x$ とおくと $f = \int f'\,dx = \int \sin x\,dx = -\cos x$ なので

$$\begin{aligned}\int x\sin x\,dx &= fg - \int fg'\,dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x\end{aligned}$$

(10) $g = x^2$，$f' = \cos x$ とおくと $f = \int f'\,dx = \int \cos x\,dx = \sin x$ なので

$$\begin{aligned}\int x^2\cos x\,dx &= fg - \int fg'\,dx \\ &= x^2\sin x - \int 2x\sin x\,dx \\ &= x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx\end{aligned}$$

となる。部分積分をもう一度実行すると

$$\begin{aligned}&= x^2\sin x - 2\left(-x\cos x + \sin x\right) \\ &= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x\end{aligned}$$

(11) $f' = x^3$，$g = \log x$ とおくと $f = \frac{1}{4}x^4$ なので

$$\begin{aligned}\int x^3\log x\,dx &= fg - \int fg'\,dx \\ &= \frac{1}{4}x^4\log x - \int \frac{1}{4}x^4\frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{1}{4}x^4\log x - \frac{1}{4}\int x^3\,dx \\ &= \frac{1}{4}x^4\log x - \frac{1}{16}x^4\end{aligned}$$

(12) $f' = 1$，$g = (\log x)^2$ とおくと $f = x$ なので

$$\begin{aligned}\int (\log x)^2\,dx &= fg - \int fg'\,dx \\ &= x(\log x)^2 - \int x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= x(\log x)^2 - 2\int \log x\,dx \\ &= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x\end{aligned}$$

となる。計算には

$$\int \log x\,dx = x\log x - x$$

を用いた。

(13) $f'=1,\ \ g=\arctan x$ とおくと $f=x,\ \ g'=\dfrac{1}{1+x^2}$ なので

$$\begin{aligned}\int \arctan x\,dx &= fg-\int fg'\,dx\\ &= x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}\,dx\end{aligned}$$

となる。ここで $t=1+x^2$ とおくと

$$\begin{aligned}\int\frac{x}{1+x^2}\,dx &= \int\frac{x}{t}\frac{1}{2x}\,dt=\int\frac{1}{2}\frac{1}{t}\,dt\\ &= \frac{1}{2}\log|t|=\frac{1}{2}\log|1+x^2|=\frac{1}{2}\log(1+x^2)\end{aligned}$$

なので

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

となる。演習問題 5.21 も参考のこと。

(14) $f'=1,\ \ g=\arcsin x$ とおくと $f=x,\ \ g'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ なので

$$\begin{aligned}\int \arcsin x\,dx &= fg-\int fg'\,dx\\ &= x\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\end{aligned}$$

となる。ここで $t=1-x^2$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=-2x$ なので

$$\begin{aligned}\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int\frac{x}{\sqrt{t}}\frac{1}{-2x}\,dt=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt\\ &= -\sqrt{t}=-\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$$

(15) (16) 両方まとめて解く。$I=\displaystyle\int e^x\sin x\,dx, J=\int e^x\cos x\,dx$ とおく。$f'=e^x, g=\sin x$ とおくと

$$I=fg-\int fg'\,dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx=e^x\sin x-J$$

となる。一方 $f'=e^x, g=\cos x$ とおくと

$$J=fg-\int fg'\,dx=e^x\cos x-\int e^x(-\sin x)\,dx=e^x\cos x+I$$

となる。2 式を連立されて解くと

$$I=\frac{1}{2}e^x\left(\sin x-\cos x\right)$$
$$J=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)$$