数学序論演習に対する追加説明#2

形式

- 学籍番号は次の様に書いて下さい。
  - 1 年生は「出席番号」を書いて下さい。
    「出席番号」とは学籍番号の下 5 桁から下 2 桁部分を抜き出し先頭から続く 0 を削除したもの。例えば学籍番号が **1310800999** であれば **99**，**1310880888** であれば **8088** です。
- 用紙を置く場所を間違えないで下さい。
- 番号が正しく書かれていない人は今後未提出とみなします。

内容

- 解答は他人が読んで理解可能なように書く必要があります。書く途中および書上げたら,「他人の目」で推敲して，他人が読んで分かるかをチェックしてください。
- 結論だけ書いてある答案は，仮に結論があっていてもテストのように採点をすれば 0 点です。
- 「$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^4 - x^2 + \dfrac{1}{5} \geqq 0$」を例にとりましょう。
- すぐに分かる間違いをしている人が若干います。見直しするとき注意して下さい。例えば
  「$x = 0$ を代入すると $x^4 - x^2 + \dfrac{1}{5} < 0$ となる」
  「$x \in \mathbb{C}$ とすると $x^2 < 0$ なので $\ldots$」
  「$x^4 \geqq x^2, \dfrac{1}{5} > 0$ より $x^4 - x^2 + \dfrac{1}{5} \geqq 0$」など
- 「$x^4 - x^2 + \dfrac{1}{5}$ は必ず 0 以上になるので」というのは理由になりません。

  記号を言葉に置き換えただけで，P という命題を証明するのに「P が正しいので P が示された。」と書いてあるのと同じです。

- 「x にどのような数をいれても 0 より大きくなるので命題は正しい」というのも理由を何も言っていません。すべての実数 x を代入して計算することは不可能なので，実行不可能なことを根拠にすることはできません。

- このことは無限集合と有限集合で異なるので追加説明をします。$X = \{ 1, 2, 3 \}$ とする。

$$\forall x \in X \quad x^4 - x^2 + \frac{1}{5} \geqq 0$$

という命題であれば，すべての場合計算することで命題の真偽を確かめることができる。今の場合 $x = 1, 2, 3$ を代入すると

$$\begin{aligned} 1^4 - 1^2 + \frac{1}{5} &= \frac{1}{5} \geqq 0 \\ 2^4 - 2^3 + \frac{1}{5} &= 12 + \frac{1}{5} \geqq 0 \\ 3^4 - 3^2 + \frac{1}{5} &= 72 + \frac{1}{5} \geqq 0 \end{aligned}$$

となるので「どのような数をいれても 0 より大きくなるので命題は正しい」という議論は正しい議論と言える。

しかし $\mathbb{R}$ は無限集合なので，すべての場合計算することは不可能である。他の手段で (何か実数の性質を用いて) 真偽を判定する必要がある。

- 「$\exists x \in \mathbb{R} \quad x^4 - x^2 + \frac{1}{5} \leqq 0$ は偽。$x = 1$ が反例」という解答がありました。これは「存在」と「任意」に関連するので説明をします。

これが「$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^4 - x^2 + \frac{1}{5} \leqq 0$ は偽。$x = 1$ が反例」というのであれば正しい議論です。

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^4 - x^2 + \frac{1}{5} \leqq 0$$

の否定命題は

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad x^4 - x^2 + \frac{1}{5} > 0$$

であり，$x = 1$ は

$$1^4 - 1^2 + \frac{1}{5} > 0$$

なので否定命題が成立し，もとの命題は偽であることが分かります。しかし

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad x^4 - x^2 + \frac{1}{5} \leqq 0$$

の否定命題は

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^4 - x^2 + \frac{1}{5} > 0$$

です。

$$1^4 - 1^2 + \frac{1}{5} > 0$$

は成立しますが，否定命題が成立するとはいえません。この意味で $x = 1$ は反例にはなっていません。