

数学序論演習に対する追加説明#3

- 「 \forall, \exists 」の入った命題の否定に関しては多くの人ができるようになっています。しかし、命題の内容を考えて真偽を判断するところは不十分な人が多いです。

- 最初は一般的な数学の学習の仕方について。

数学は論理の積み重ねですから、要綱・演習問題で分からない所があれば、その部分より前に書いてあることへの理解が不十分なわけです。例えば演習問題 1.5 で

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a < x \implies b < x$$

という命題の否定命題をつくれないうきは、(1) 「 $\forall x$ 」の否定がつけられないなら、少し前の部分を見ればよいし、(2) 「 $a < x \implies b < x$ 」の否定が分からないときは 1.1 節を見る必要があります。この様に自分の分からない所を自分で見つけることが有効な学習の仕方だと思います。

どこでやったか記憶にないときは、要綱を順にさかのぼりながら見て探すのも 1 つの方法です。

- 前にも言いましたが、理由を書くこと。

例えば演習問題で「真偽を判定せよ」とあるとき、これは「結論だけ述べよ」という意味ではなく、「どうしてそうなるかの理由」・「判定の根拠」を示すことが必要です。これからの演習問題も常にそういう意味だと理解して下さい。

- 前項と関連して「どの様子に書けばよいのか分からない」という質問をうけたので、ことに関して述べておきます。この様なときには 2 通りの場合が考えられます。(1) 本当に書き方だけが分からない場合、と (2) 内容の理解が不十分な場合、です。

「どの様子に書けばよいのか分からない」と質問してくる人の多くは (1) の書き方の問題ではなく、(2) の内容理解の問題です。(2) に関しては後で述べるとして、ここでは (1) について述べます。

自分の頭の中に、演習問題を解いている自分とは別に、他人の立場でその演習問題の解答を読んでいる自分を想定します。その他人である自分が、自分である自分の書いたものを読ん

で、論理が追えて正しいと思えたら OK です。最初は慣れないと思いますが、少し訓練するとできるようになると思います。他人として融通のきかない computer を想定するのも 1 つの方法です。

- 自分が内容を理解しているのか and/or してないのかを自分で正確に把握することも重要です。それができると理解への道の 50%以上の場所にいると言えます。自己把握に関して言うと次の様な段階が考えられます。(2) を (3) に変える所が理解の最も重要な階梯だと言えます。
 - (1) 理解してないのに理解していると誤解している。
 - (2) 理解が不十分でかつどこが理解できていないかを把握できていない。所謂「なんとなく分からない」状態。
 - (3) 理解が不十分だがどこが理解できていないかを把握している。
 - (4) 正確に理解している。
- 演習問題 1.6 を解説する。

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \quad x > y$$

と

$$\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} \quad x > y$$

の真偽を考察せよ、というのが問題であった。

「任意」と「存在」が 2 つ以上あるときは次のように考えるものよいかもしれない。自分と相手にゲームをしている。自分は命題を成立させたいと思い、相手は命題が成立させたくないと思っているとする。

「任意」は相手が選び、「存在」は自分が選ぶと考える。

前者の命題は相手が実数 x をどの様に選んでも、それに対応して自分が $x > y$ となる y を選べるかという問題になる。これは当然可能なので前者は正しい命題である。

後者の命題は最初に自分が y を選ばなくてはならない。どのような y を選ぶかという任意の x に対して $x > y$ となる y であるが、そのような y は存在しないので選ぶことができない。よって後者は正しくない命題である。