数学序論追加説明#4

- 集合 A と B が等しいことの定義は

$$A \subseteq B \quad \text{かつ}\ A \supseteq B$$

です。2 つの集合が等しいことを示すにはこれを示すことが必要です。

- 演習問題 2.1 (2) を例に説明します。問題は

> 3 で割ると余りが 2 となるような自然数全体の集合

です。

- 結論は $A = \{3k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ である。この表示では見にくいので $A = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{N}$ または $k = 0\}$ という書き方もできる。

- この問題だと結果のみ書いてある解答でも間違いとは言えないかもしれないが，ここは集合の記号に慣れることが目的なので，**詳しく** (**しつこく**) 解答しておく。

- 3 で割って 2 余る整数 n は

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad n = 3k + 2$$

と書けるので，3 で割って 2 余る自然数全体の集合は

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{Z}\ n = 3k + 2\}$$

と表すことができる。

- よって $A = \{3k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ とおいて $A = B$ を示せばよい。

- 最初に $A \subseteq B$ を示す。n を A の任意の元とすると，ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して $n = 3k - 1 = 3(k - 1) + 2$ と書ける。ここで $k - 1 \in \mathbb{Z}$ であることに注意しておく。また $k \geqq 1$ より $3k - 1 \geqq 3 \cdot 1 - 1 = 2$ が成立するので，n は自然数である。よって $n \in B$ となり，$A \subseteq B$ が成立する。

- 次に $B \subseteq A$ を示す。n を B の任意の元とすると，ある整数 k が存在して，$n = 3k + 2$ となる。ここで $k < 0$ とすると $k \leqq -1$ なので $n = 3k + 2 \leqq 3 \cdot (-1) + 2 = -1 < 0$ となる。

これは n が自然数であることに矛盾するので，$k \geqq 0$ である。$j = k+1$ とおくと $j \in \mathbb{N}$ であり，$n = 3k+2 = 3(j-1)+2 = 3j-1$ となる。よって $n \in A$ となり，$B \subseteq A$ が示された。以上により $A = B$ が成立する。

- 演習問題 2.1 (4) を例に説明します。問題は

  > 3 で割ると余りが 2 であり，5 で割ると余りが 3 となるような自然数全体の集合

  です。

- 最初にどのような集合になるか「解析」する必要があります。与えられた集合は

  $$A = \{ n \in \mathbb{N} \mid \exists k_1 \in \mathbb{Z}\ n = 3k_1 + 2, \exists k_2 \in \mathbb{Z}\ n = 5k_2 + 3 \}$$

  と書けます。具体的に元をいくつかを求めると，3 で割って余りが 2 である自然数は

  $$2, 5, \mathbf{8}, 11, 14, 17, 20, \mathbf{23}, 26, 29, 32, 35, \mathbf{38}, \ldots$$

  であり，5 で割って余りが 3 である自然数は

  $$3, \mathbf{8}, 13, 18, \mathbf{23}, 28, 33, \mathbf{38}, 43, 48, 53, 58, 63, \ldots$$

  なので

  $$\{ 8, 23, 38, \ldots \}$$

  と予想されます。

- 与えれた集合は 15 で割ると余りが 8 である自然数の集合

  $$B = \{ n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{Z}\ n = 15k + 8 \} = \{ 15k - 7 \mid k \in \mathbb{N} \}$$

  であることが予想されます。

- $A = B$ を示すために，(1) $A \supseteq B$ および (2) $A \subseteq B$ を示します。

- 最初は (1) $A \supseteq B$ ：n を B の任意の元とする。このとき整数 k が存在して

  $$n = 15k + 8$$

と書ける。このとき

$$
\begin{aligned}
n &= 15k + 8 = 3 \cdot 5k + 3 \cdot 2 + 2 \\
&= 3(5k + 2) + 2
\end{aligned}
$$

なので $k_1 = 5k + 2$ とおくと $n = 3k_1 + 2$ と書けている。また

$$
\begin{aligned}
n &= 15k + 8 = 5 \cdot 3k + 5 \cdot 1 + 3 \\
&= 5(3k + 1) + 3
\end{aligned}
$$

なので $k_2 = 3k_1$ とおくと $n = 5k_2 + 3$ と書けている。よって $n \in A$ となり，$A \supseteq B$ が示される。

- 次に $A \subseteq B$ ：n を A の任意の元とする。このとき整数 k_2 が存在して $n = 5k_2 + 3$ と書けている。ここで k_2 を 3 で割った余りを考えると 0,1,2 のどれかなので 3 つに場合分けする。

- k_2 が 3 で割り切れる場合 ：$k_2 = 3j$ となる整数 $j \in \mathbb{Z}$ が存在する。このとき

$$
n = 5k_2 + 3 = 5(3j) + 3 = 3(5j + 1)
$$

となり n が 3 で割り切れる。これは仮定に反するので，この場合はない。

- k_2 が 3 で割って余り 1 の場合：$k_2 = 3j + 1$ となる整数 $j \in \mathbb{Z}$ が存在する。このとき

$$
n = 5(3j + 1) + 3 = 15j + 8
$$

となるので n は 15 で割ると 8 余る自然数であり，$n \in B$ となる。

- k_2 が 3 で割って余り 2 の場合：$k_2 = 3j + 2$ となる整数 $j \in \mathbb{Z}$ が存在する。このとき

$$
\begin{aligned}
n &= 5(3j + 2) + 3 = 3 \cdot 5j + 13 = 3 \cdot 5j + 3 \cdot 4 + 1 \\
&= 3(5j + 4) + 1
\end{aligned}
$$

となるので n は 3 で割ると 1 余る自然数である。これは仮定に反するので，この場合はない。

- 以上により $A \subseteq B$ が示された。