数学序論追加説明#5

- 集合 A と B が等しいことの定義は

$$A \subseteq B \quad \text{かつ } A \supseteq B$$

です。2 つの集合が等しいことを示すにはこれを示すことが必要です。

- 演習問題 2.3 (2) を考える。問題は

> $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ でないことを定義に基づいて証明せよ。

です。

- $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ であることの定義は

$$\forall n \quad n \in \mathbb{Z} \implies n \in \mathbb{N}$$

です。

- この否定命題は

$$\exists n \quad \neg\,(n \in \mathbb{Z} \implies n \in \mathbb{N})$$

ですが，これは

$$\exists n \qquad n \in \mathbb{Z} \wedge n \notin \mathbb{N}$$

です。

- $\mathbb{Z}$ の要素であって，$\mathbb{N}$ の要素でないものは沢山ありますが，存在を示すためには 1 個でよいので，解答は次の様になります。

> $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ であることの定義は「$\forall n \quad n \in \mathbb{Z} \implies n \in \mathbb{N}$」である。この否定は「$\exists n \quad n \in \mathbb{Z} \wedge n \notin \mathbb{N}$」である。$-33 \in \mathbb{Z}$ であり $-33 \notin \mathbb{N}$ なので否定命題が成立し，$\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ は成立しない。

- 演習問題 2.3 (3) を考える。問題は

> $\mathbb{N} = \mathbb{Z}$ でないことを定義に基づいて証明せよ。

です。

- $\mathbb{N}=\mathbb{Z}$ の定義は「$\mathbb{N}\supseteq\mathbb{Z}$ かつ $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$」です。$\mathbb{N}\supseteq\mathbb{Z}$ が成立しないので当然 $\mathbb{N}=\mathbb{Z}$ も成立しません。

  > $\mathbb{N}=\mathbb{Z}$ の定義は「$\mathbb{N}\supseteq\mathbb{Z}$ かつ $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$」である。$\mathbb{N}\supseteq\mathbb{Z}$ が成立しないので $\mathbb{N}=\mathbb{Z}$ も成立しない。

- 演習問題 2.5 (1) を考える。問題は

  > $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ を証明せよ。

  です。

- ベン図を書いただけの人もいました。「ベン図で考える」ことは悪いことではありませんが，ベン図は証明の代わりにはなりません。

- 共通部分と和集合の定義は

$$\begin{aligned} X\cap Y &= \{x \mid x\in X\wedge x\in Y\} \\ X\cup Y &= \{x \mid x\in X\vee x\in Y\} \end{aligned}$$

  なので

$$\begin{aligned} x\in X\cap Y &\iff x\in X\wedge x\in Y \\ x\in X\cup Y &\iff x\in X\vee x\in Y \end{aligned}$$

  となります。これを用いると

$$\begin{aligned} x\in A\cap(B\cup C) &\iff x\in A\wedge x\in B\cup C \\ &\iff x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C) \\ &\iff (x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C) \\ &\iff x\in A\cap B\vee x\in A\cap C \\ &\iff x\in(A\cap B)\cup(A\cap C) \end{aligned}$$

  となる。途中 (赤色の所)「論理の分配法則」を用いた。