数学序論追加説明#6

- 演習問題 2.11 を考える。問題 (1) は例 2.9 (1) において

  $f(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqq 0\}$ の成立を示す

  ことです。

- 一般に写像

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ a &\longmapsto b = f(a) \end{aligned}$$

  に対し

$$f(A) = \{\, f(a) \mid a \in A \,\} = \{\, b \in B \mid \exists a \in A \; b = f(a) \,\}$$

  と定義されているので

$$f(\mathbb{R}) = \{\, f(x) \mid x \in \mathbb{R} \,\} = \{\, y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} \; y = f(x) \,\}$$

  です。

- $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqq 0\}$ とおくとき，$f(\mathbb{R}) = B$ を示せばよい。

- 集合 A と集合 B が等しいことの定義は

$$A \subseteq B \quad \text{かつ} \; A \supseteq B$$

  です。2 つの集合が等しいことを示すにはこれを示すことが必要です。

- 最初に $f(\mathbb{R}) \subseteq B$ を示す。$f(\mathbb{R})$ の任意の元を y とするとある元 $x \in \mathbb{R}$ が存在して $y = f(x)$ と書ける。$f(x) = x^2$ なので $y = x^2 \geqq 0$ である。勿論 $y \in \mathbb{R}$ である。よって $y \in B$ となり，$f(\mathbb{R}) \subseteq B$ が示された。

- 次に $f(\mathbb{R}) \supseteq B$ を示す。y を B の任意の元とすると，$y \in \mathbb{R}$ であり，$y \geqq 0$ である。ここで $y = \sqrt{x}$ の存在を既知とする。$x = \sqrt{y}$ とおくと，$x \in \mathbb{R}$ であり

$$f(x) = x^2 = \left(\sqrt{y}\right)^2 = y$$

  となる。よって $y \in f(\mathbb{R})$ となり，$f(\mathbb{R}) \supseteq B$ が示された。

- (2) は同様にできるので，解説は省略して (3) を考える。

> $A=\{x\in\mathbb{Q}\,|\,x\geqq 0\}$ とし，$f:A\longrightarrow A$ を $f(x)=x^2$ で定義すると f は全射でないことを示せ。

- 背理法で証明する。f が全射であると仮定すると，$f(A)=A$ が成立する。

- A の任意の元は $f(A)$ の元である。$2\in A$ なので $2\in f(A)$ である。このとき $a\in\mathbb{Q}$ $(a\geqq 0)$ が存在して $2=f(a)$ となる。このとき $2=f(a)=a^2$ なので $a=\sqrt{2}$ となる。$\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ となるので矛盾。よって f は全射ではない。