

## 数学序論追加説明#9

- 逆三角関数は**範囲**を必ずチェックすること。
- 例えば演習問題 4.10 (2)–(2) を考える。問題は

$$\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{5}{13} = \arcsin \frac{56}{65}$$

を示せというものである。

- 関数  $\arcsin$  は  $\sin$  の逆関数として

$$y = \arcsin x \iff x = \sin y \left( -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

と定義されている。

- $X = \arcsin \frac{3}{5}$  とおくと、

$$\frac{3}{5} = \sin X \left( -\frac{\pi}{2} \leq X \leq \frac{\pi}{2} \right) \quad (1)$$

である。

- $Y = \arcsin \frac{5}{13}$  とおくと、

$$\frac{5}{13} = \sin Y \left( -\frac{\pi}{2} \leq Y \leq \frac{\pi}{2} \right) \quad (2)$$

である。

- $X + Y = \arcsin \frac{56}{65}$  を示せばよいので最初に

$$\sin(X + Y) = \frac{56}{65}$$

を示す。

- $-\frac{\pi}{2} \leq X \leq \frac{\pi}{2}$  より  $\cos X \geq 0$  である。

$$\begin{aligned} \cos X &= \sqrt{1 - \sin^2 X} = \sqrt{1 - \frac{3^2}{5^2}} \\ &= \sqrt{\frac{4^2}{5^2}} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

となる。

- $-\frac{\pi}{2} \leq Y \leq \frac{\pi}{2}$  より  $\cos Y \geq 0$  である。

$$\begin{aligned}\cos Y &= \sqrt{1 - \sin^2 Y} = \sqrt{1 - \frac{5^2}{13^2}} \\ &= \sqrt{\frac{12^2}{13^2}} = \frac{12}{13}\end{aligned}$$

となる。

- よって加法定理より

$$\begin{aligned}\sin(X + Y) &= \sin X \cos Y + \cos X \sin Y \\ &= \frac{3}{5} \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \frac{5}{13} = \frac{56}{65}\end{aligned}$$

となる。

- ここからすぐに  $X + Y = \arcsin \frac{56}{65}$  としてはいけない。

$$X + Y = \arcsin \frac{56}{65} \iff \sin(X + Y) = \frac{56}{65} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq X + Y \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

であるから  $-\frac{\pi}{2} \leq X + Y \leq \frac{\pi}{2}$  を示さなければならない。

$-\frac{\pi}{2} \leq X + Y \leq \frac{\pi}{2}$  を示す方法はいくつかあるが、ここでは  $\cos$  の値を計算することによって求める。

- $-\frac{\pi}{2} \leq X \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq Y \leq \frac{\pi}{2}$  より

$$-\pi \leq X + Y \leq \pi$$

が成立する。この範囲より  $\cos(X + Y) \geq 0$  が示されれば

$$-\frac{\pi}{2} \leq X + Y \leq \frac{\pi}{2}$$

が分かる。

$$\begin{aligned}\cos(X + Y) &= \cos X \cos Y - \sin X \sin Y \\ &= \frac{4}{5} \frac{12}{13} - \frac{3}{5} \frac{5}{13} = \frac{33}{65}\end{aligned}$$

なので

$$\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{5}{13} = X + Y = \arcsin \frac{56}{65}$$

が成立する。