

## 数学序論追加説明#10

- 逆三角関数は**範囲**を必ずチェックすること。

$$y = \arctan x \iff \begin{cases} (1) & x = \tan y \\ (2) & -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- 例えば演習問題 4.10 (2)–(4) を考える。問題は

$$4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

を示せというものである。

$\alpha = \arctan \frac{1}{5}$  とおくと  $\tan \alpha = \frac{1}{5}$  ( $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) である。

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{5}{12}$$

$$\tan 4\alpha = \frac{2 \tan 2\alpha}{1 - \tan^2 2\alpha} = \frac{2 \cdot \frac{5}{12}}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119}$$

$$\tan \left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4\alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan 4\alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}$$

ここからいきなり  $4\alpha - \frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{239}$  としないように !!

$4\alpha - \frac{\pi}{4}$  の範囲のチェックを必ずすること。

- $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$  であるが,  $0 < \tan \alpha < 1$  より

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$$

が成立している。これを变形すると

$$0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$0 < 4\alpha < \pi$$

$$-\frac{\pi}{4} < 4\alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$$

となるが,  $0 < \tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$  より  $4\alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$  である。

- よって  $-\frac{\pi}{2} < 4\alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$  なので

$$4\alpha - \frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{239}$$

となり式が得られる。