数学序論追加説明#12

- 定義に基づいて導関数を求めることに成功していない人がいたので解説しておく。知られている極限は

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1,\qquad \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

なのでそれに帰着させる必要がある。

- 最初に演習問題 5.18(3)。

$$\begin{aligned}
\big(\cos 2x\big)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos 2(x+h)-\cos 2x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos 2x\cos 2h-\sin 2x\sin 2h-\cos 2x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\cos 2x\frac{\cos 2h-1}{h}-\sin 2x\frac{\sin 2h}{h}\right\}\\
&= \cos 2x\lim_{h\to 0}\frac{\cos 2h-1}{h}-\sin 2x\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{h}
\end{aligned}$$

となる。ここで,

$$\frac{\cos 2h-1}{h}=\frac{(\cos 2h-1)(\cos 2h+1)}{h(\cos 2h+1)}=\frac{-\sin^2 2h}{h(\cos 2h+1)}$$

なので

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\cos 2h-1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{-\sin^2 2h}{h(\cos 2h+1)}\\
&= -\lim_{h\to 0}2\frac{\sin 2h}{2h}\frac{\sin 2h}{\cos 2h+1}\\
&= -2\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{2h}\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{\cos 2h+1}\\
&= -2\cdot 1\cdot 0=0
\end{aligned}$$

であり,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{h} = \lim_{h\to 0}2\frac{\sin 2h}{2h}=2\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{2h}=2\cdot 1=2$$

なので

$$\big(\cos 2x\big)'=-2\sin 2x$$

となる。

- 最初に加法定理で $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ 等の変形を実行した後計算している人もいた。これでも勿論できるが，加法定理を用いると 1 次式が 2 次式になる等複雑になることもあるので，計算の大きな方針を持って計算を実行した方がよいだろう。

- 例えば $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ と辺形して計算すると次のようになる。

$$
\begin{aligned}
(\cos 2x)' &= \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)' \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2(x+h) - \sin^2(x+h) - \cos^2 x + \sin^2 x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\cos^2(x+h) - \cos^2 x)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sin^2(x+h) - \sin^2 x\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(\cos(x+h) + \cos x)\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\
&\quad - \lim_{h\to 0}(\sin(x+h) + \sin x)\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}
\end{aligned}
$$

となる。

- 式は

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\
&= \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} &= \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\
&= \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h}
\end{aligned}
$$

と変形できる。

- cos の極限は分からないので sin の極限に直す。

$$
\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} = -\frac{\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} = -\frac{\sin h}{h}\frac{\sin h}{(\cos h + 1)}
$$

- 以上より

$$
(\cos 2x)' = -2\cos x \sin x - 2\sin x \cos x
$$

となる。

- log の極限は分からないので指数関数の極限に直す必要がある。

$$\bigl(\log x\bigr)' \quad = \quad \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}$$

であるが，ここで $k=\log(x+h)-\log x$ とおくと $h\to 0$ のとき $k\to 0$ となる。

$$\log(x+h)-\log x=\log\frac{x+h}{x}$$

なので $\log\dfrac{x+h}{x}=k$ より $e^k=\dfrac{x+h}{x}$ を得る。これを h について解くと

$$h=x(e^k-1)$$

となる。これを代入して次を得る。

$$\begin{aligned}\bigl(\log x\bigr)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\lim_{k\to 0}\frac{k}{x(e^k-1)}\\ &= \frac{1}{x}\lim_{k\to 0}\frac{k}{e^k-1}=\frac{1}{x}\end{aligned}$$