数学序論追加演習問題#1

1 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射であるとは,

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

が成立することである。写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射であるとは,

$$\forall y \in Y \ \exists x \in X \quad y = f(x)$$

が成立することである。このとき次の問いに答えよ。

(1) 「写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射でない」という命題を論理記号を用いて表せ。

(2) 「写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射でない」という命題を論理記号を用いて表せ。

(3) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$ $f : A \longrightarrow B$ を $f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 2$ で定義する。このとき f が全単射であるかどうか理由をつけて述べよ。

(4) 写像 $f : [\,0, \infty\,) \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定義する。このとき f が全単射であるかどうか理由をつけて述べよ。ここで $\mathbb{R}$ は実数全体のつくる集合である。

2 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射であるとは,

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

が成立することである。写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射であるとは,

$$\forall y \in Y \ \exists x \in X \quad y = f(x)$$

が成立することである。このとき次の問いに答えよ。

(1) 「写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射でない」という命題を「任意 (∀)」と「存在 (∃)」を用いて表せ。

(2) 「写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射でない」という命題を「任意 $(\forall)$」と「存在 $(\exists)$」を用いて表せ。

(3) 写像 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定義する。このとき f が全単射であるかどうか理由をつけて述べよ。ここで $\mathbb{R}$ は実数全体のつくる集合である。

(4) 写像 $f : [\,0,\,\infty\,) \longrightarrow [\,0,\,\infty\,)$ を $f(x) = x^2$ で定義する。このとき f が全単射であるかどうか理由をつけて述べよ。ここで $[\,0,\,\infty\,) = \{\,x \in \mathbb{R} \mid x \geqq 0\,\}$ である。なお $x \geqq 0$ に対し $\sqrt{x}$ が存在することは仮定してよい。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射であるとは,

$$\forall y \in Y \ \exists x \in X \ \ y = f(x)$$

が成立することである。このとき次の問いに答えよ。

(1) 「写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射でない」という命題を「任意 $(\forall)$」と「存在 $(\exists)$」を用いて表せ。

(2) $X = \{\,1, 2, 3, 4, 5\,\}$ とする。写像 $f : X \longrightarrow X$ を $f(1) = 5, f(2) = 2, f(3) = 1, f(4) = 3, f(5) = 5$ で定義する。このとき f が全射であるかどうか理由をつけて述べよ。

(3) $f : X \longrightarrow Y$ および $g : Y \longrightarrow Z$ が共に全射であるとき，$g \circ f$ が全射であることを証明せよ。

(4) (3) の例を 1 つあげよ。