

## 4.2 単調関数と逆関数

定義 4.3  $f(x)$  を区間  $I$  上で定義された関数とする。

- (1) 任意の  $x_1, x_2 \in I$  に対し  $x_1 < x_2$  ならば  $f(x_1) < f(x_2)$  となる時,  $f$  は単調増加であるという。
- (2) 任意の  $x_1, x_2 \in I$  に対し  $x_1 < x_2$  ならば  $f(x_1) > f(x_2)$  となる時,  $f$  は単調減少であるという。
- (3) 単調増加関数か単調減少関数を単に単調関数という。

次の命題が成立する。

命題 4.4  $f$  を区間  $I$  上の単調関数とする。このとき  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  は単射である。

演習問題 4.5 命題 4.4 を証明せよ。

$I, J$  を  $\mathbb{R}$  上の区間とする。 $y = f(x)$  を  $I$  上の関数とし, これを写像  $f: I \rightarrow J$  と見た時に全単射となっているとする。この時, 逆写像  $f^{-1}: J \rightarrow I$  が存在するが, これを  $f: I \rightarrow J$  の逆関数という。

$f$  の定義域は  $I$ , 終域 (今の場合は値域でもある) は  $J$  である。この時に, 逆関数  $f^{-1}$  は,  $J$  を定義域とし  $I$  を終域とする。命題 4.4 より  $f: I \rightarrow J$  が単調でありかつ全射なら逆関数が存在することが分かる。

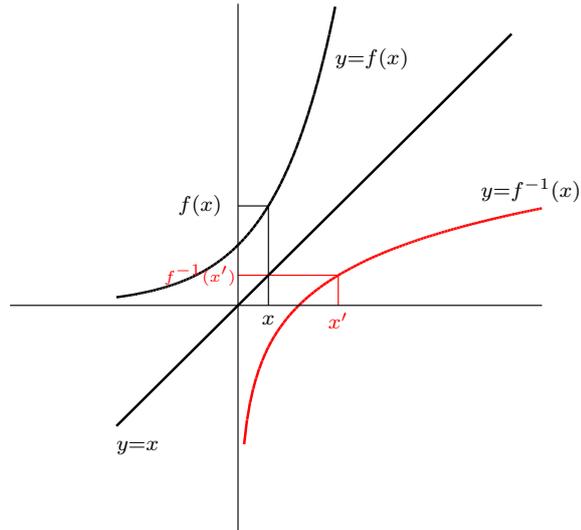
### 逆関数のグラフ

関数  $f: I \rightarrow J$  のグラフとは, 平面上の  $\{(x, f(x)) \mid x \in I\}$  という集合のことであった。 $f: I \rightarrow J$  が全単射である時, 逆関数  $f^{-1}: J \rightarrow I$  を考える。

$x \in I$  に対して  $f(x) = x'$  とすると  $x' \in J$  であり  $f^{-1}(x') = x$  である。すなわち,

$$(x', f^{-1}(x')) = (f(x), x)$$

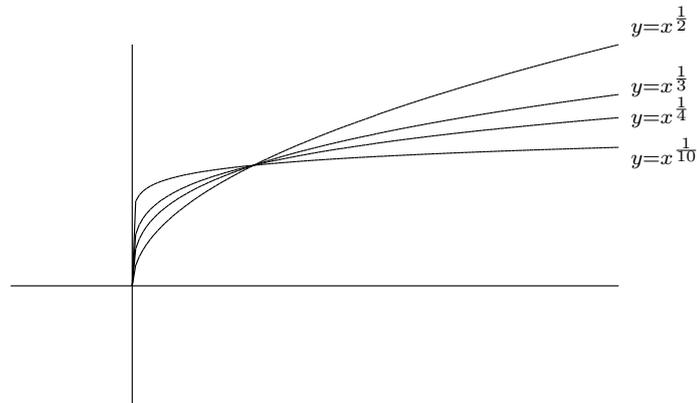
となっている。このことは,  $f^{-1}$  のグラフ上の点  $(x', f^{-1}(x'))$  は  $(f(x), x)$  という点であり, これは,  $f(x)$  のグラフ上の点  $(x, f(x))$  と, 対角線  $y = x$  に関して対称な位置にある点である。



このことから，次が成り立つ。

**命題 4.5**  $f : I \rightarrow J$  のグラフと  $f^{-1} : J \rightarrow I$  のグラフは，直線  $y = x$  に関して互いに対称な位置にある。

$n \geq 2$  を自然数とし， $f(x) = x^n$  という関数を考える。ただし定義域は  $[0, \infty)$ ，終域は  $[0, \infty)$  とする。このとき  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  は全単射になっているので，逆関数  $f^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  が存在する。これがべき根関数と呼ばれる  $f^{-1}(x) = x^{1/n}$  という関数である。



べき根関数の定義を式で書くと

$$y = x^{\frac{1}{n}} \iff x = y^n \quad (y \geq 0)$$

である。これは知られた関数への「翻訳」と考えることができる。逆関数として定義された関数の性質を調べるには，この「翻訳」を用いるしかない。

例として  $(a^2)^{\frac{1}{2}} = |a|$  を示そう。「翻訳」を適用すると

$$b = (a^2)^{\frac{1}{2}} \iff a^2 = b^2 \quad (b \geq 0)$$

となる。 $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 0$  より,  $b = a$  または  $b = -a$  である。 $a \geq 0$  のときは  $b = a$ ,  $a < 0$  のときは  $b = -a$  なので  $b = |a|$  である。

### 4.3 指数関数

指数関数  $a^x$  は, 最初は  $x$  が自然数の場合から始めて実数まで拡張された<sup>(1)</sup>。拡張の方針は, 有理数までは指数法則が成立するように拡張して行き, 実数は連続性が保たれるように拡張する。

定義 4.6 [自然数]  $a$  を正の実数とする。自然数  $n$  に対して,  $a$  を  $n$  回かけて得られる実数を  $a^n$  と表す。即ち

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ 個}}$$

と定義する。

命題 4.7 [指数法則 (自然数)]  $a$  を正の実数とする。任意の  $m, n \in \mathbb{N}$  に対して

$$a^{m+n} = a^m a^n, \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

が成り立つ。

証明は冪乗の個数を数えることで得られる (厳密には数学的帰納法が必要になる)。

演習問題 \*4.6 命題 4.7 を数学的帰納法で証明せよ。

定義 4.8 [整数] (1)  $\frac{1}{a}$  を  $a^{-1}$  と表す。 $a^{-1}$  を  $n$  回かけて得られる実数, すなわち  $(a^{-1})^n$  を  $a^{-n}$  と表す。

(2)  $a^0 = 1$  と定義する。

以上から, 任意の整数  $n \in \mathbb{Z}$  に対して  $a^n$  が定義されたことになる。

この定義から, 指数法則が整数に対し拡張される。

<sup>(1)</sup>オイラーの公式に見るように, 最終的には複素数まで拡張されるが, ここでは実数までの拡張を考える。

命題 4.9 [指数法則 (整数)]  $a$  を正の実数とする。任意の  $m, n \in \mathbb{Z}$  に対して

$$a^{m+n} = a^m a^n, \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

が成り立つ。

演習問題 4.7 命題 4.9 を証明せよ。ただし自然数に対し指数法則が成立すること (命題 4.7) は用いてよい。

等比数列の性質から、次が成り立つ。

命題 4.10 (1)  $0 < a < 1$  ならば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} a^n = \infty$$

(2)  $a > 1$  ならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} a^n = 0$$

次に、 $a$  の有理数乗 というものを定義する。

定義 4.11 [有理数]  $a$  を正の実数とする。

(1) 自然数  $n$  に対して、 $a$  の  $n$  乗根、すなわち  $b^n = a$  となるような正の実数  $b$  (そのような  $b$  はただ 1 つしかない) を  $a^{1/n}$  と表す。

(2)  $n$  が負の整数の場合、 $a^{1/n}$  を  $\frac{1}{a^{1/(-n)}} = (a^{1/(-n)})^{-1}$  として定義する。

(3)  $p/q$  を 0 ではない有理数とする。ここで  $p, q$  は 0 ではない整数である。 $a^{p/q}$  を、

$$a^{p/q} = (a^{1/q})^p$$

と定義する。

(4)  $r = p/q = s/t$  を 0 ではない有理数とする。 $(a^{1/q})^p = (a^{1/t})^s$  となることから (演習問題 4.8 参照)。これにより、 $a^r$  を  $(a^{1/q})^p$  により定義できる。

(5) 以上から、任意の有理数  $r$  に対して  $a^r$  が定義された。

このように、べき根を分数指数によって表記するという方法は、1628 年にフランスのアルベール・ジラル드가著した『代数における新発見』で初めて導入された。

この様に有理数まで指数関数を拡張したとき，整数に対して成立する指数法則が有理数について成立するのかが問題になる。そのことを示すのが次の演習問題である。少し難しいので星印付き演習問題としておく。また有理数に対する単調性の成立も示している。

演習問題 \*4.8  $a$  は正の実数とする。

- (1)  $n$  を自然数とする。 $b^n = a$  を満たすような正の実数  $b$  はただ一つしかないことを証明せよ。
- (2)  $p, q$  が 0 ではない整数の時， $(a^{1/q})^p = (a^p)^{1/q}$  を示せ。
- (3)  $p, q, s, t$  が 0 ではない整数であって  $p/q = s/t$  となっている時， $(a^{1/q})^p = (a^{1/t})^s$  となることを示せ。
- (4) 任意の有理数  $u, v$  に対して，次が成り立つことを示せ。

$$a^{u+v} = a^u a^v, \quad (a^u)^v = a^{uv}$$

- (5) 任意の有理数  $u$  に対して  $a^u > 0$  を示せ。
- (6)  $1 < a$  の時，有理数  $u, v$  が  $u < v$  ならば  $a^u < a^v$  を示せ。
- (7)  $0 < a < 1$  の時，有理数  $u, v$  が  $u < v$  ならば  $a^u > a^v$  を示せ。

有理数まで拡張してきたが，次に実数までの拡張を考える。ここで拡張の方針が変わる。今までは指数法則が成立するように拡張してきたが，その方針ではうまくいかない。そこで「連続性」が成立するように拡張することにする。次の疑問から始める。

$2^\pi$  をどの様に定義するか

「 $2^{\text{有理数}}$ 」は定義されているので，それを用いる。 $\pi$  に収束する有理数列を考える。例えば  $a_n$  を  $\pi$  を小数点  $n + 1$  桁で切り捨てて得られる数列とする。即ち，

$$a_1 = 3.1, a_2 = 3.14, a_3 = 3.141, \dots$$

とする。このとき

$$2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, \dots$$

という数列を考え，この極限を  $2^\pi$  と定義するのである。グラフでいうと  $y = 2^x$  ( $x \in \mathbb{Q}$ ) というグラフを考え，それを関数が連続になるように拡張することになっている。

定義 4.12 [実数] 任意の実数  $x$  に対して  $a^x$  を定義することを考える。 $x$  が無理数であっても，そのいくらでも近くに有理数がある。

すなわち  $x$  に収束する有理数の数列  $r_n$  がある。 $a^x$  の値を

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$$

として定義する。

これにより本当に正しく定義されていることを証明するのは、実数の連続性などが絡んでくるのでかなりやっかいであり、ここでは述べない。「有理数上まで定義して、あとは連続的に実数全体に拡張した」と理解してもらえれば良い。

これにより、全ての实数  $x$  に対して  $a^x$  が定義された。これを  $x$  の関数と見た時 指数関数 という。

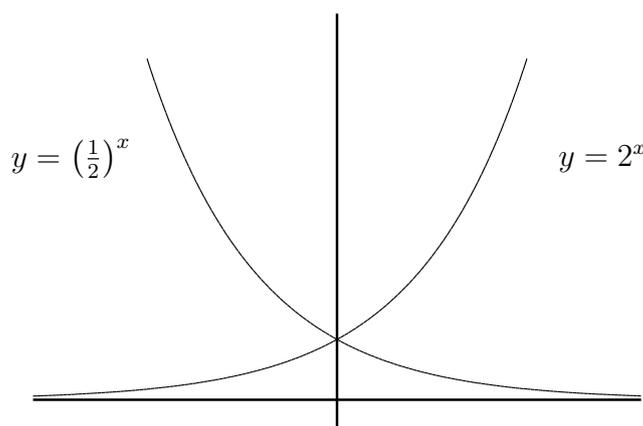
指数関数  $a^x$  の性質をまとめると、

- (1) 正の実数  $a$  に対して定義される。
- (2) 任意の実数  $x$  に対して  $a^x > 0$
- (3) [指数法則] 任意の実数  $s, t$  に対して  $a^{s+t} = a^s a^t$ ,  $(a^s)^t = a^{st}$
- (4)  $1 < a$  ならば  $a^x$  は単調増加。すなわち,  $s < t \implies a^s < a^t$
- (5)  $0 < a < 1$  ならば  $a^x$  は単調減少。すなわち,  $s < t \implies a^s > a^t$
- (6)  $0 < a < 1$  ならば,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$$

- (7)  $1 < a$  ならば,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$



(1) ~ (5) は,  $x$  が有理数の場合に成り立つ性質だったが, 実数全体に連続的に拡張したので, やはり成り立つ (証明略)。 (6), (7) については, 整数の場合について成り立っているが, (4), (5) の  $a^x$  の単調性から, 実数の場合でも成り立つ。