数学序論要綱 #11

4.4 対数関数

$a \neq 1$ を正の実数として $f(x) = a^x$ を指数関数とする。指数関数の性質のところで述べたように，$f : \mathbb{R} \longrightarrow (\,0, \infty\,)$ は単調増加かまたは単調減少であるので単射である。また，$a > 1$ のときは $\displaystyle\lim_{x\to\infty} a^x = \infty, \ \lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ であり，$0 < a < 1$ のときは $\displaystyle\lim_{x\to\infty} a^x = 0, \ \lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$ となり，$(\,0, \infty\,)$ の全ての値をとるので全射である。よって，全単射である。

従って，逆関数 $f^{-1} : (\,0, \infty\,) \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在する。この関数を $\log_a x$ と書き，a を**底** とする**対数関数** という。

$$y = a^x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \log_a y$$

指数法則より，次が成り立つ。

命題 4.13 (1) $\log_a 1 = 0$，$\log_a a = 1$ が成り立つ。
(2) 任意の正の実数 p, q に対して次が成り立つ。

$$\log_a pq = \log_a p + \log_a q$$

(3) 任意の正の実数 p と任意の実数 c に対して次が成り立つ。

$$\log_a p^c = c \log_a p$$

(4) (底の変換) 1 ではない任意の正の実数 a, b と任意の正の実数 p に対して次が成り立つ。

$$\log_a p = \frac{\log_b p}{\log_b a}$$

証明 **(1)** $a^0 = 1$ より，対数の定義を用いると $0 = \log_a 1$ となる。$a^1 = a$ より $1 = \log_a a$ となる。
(2) a^x という関数は任意の正の実数をその値として持つから，任意の正の実数 p, q に対してある実数 s, t があって $p = a^s, q = a^t$ となる。指数法則から，$r = a^{s+t}$ とおくと，$r = a^{s+t} = a^s a^t = pq$ である。また，対数関数の定義から，$s = \log_a p, t = \log_a q, s + t = \log_a r = \log_a pq$ であるから，$\log_a r = \log_a pq = \log_a p + \log_a q$ となる。

(3) $p = a^s$ とする。指数法則から $p^c = (a^s)^c = a^{cs}$ であるから，$\log_a p^c = cs = c\log_a p$ が成り立つ。
(4) $b^u = p,\ b^v = a$ とすると $\log_b p = u,\ \log_b a = v$ である。

$$p = b^u = b^{\frac{u}{v}\cdot v} = (b^v)^{\frac{u}{v}} = a^{\frac{u}{v}}$$

であるから，

$$\log_a p = \frac{u}{v} = \frac{\log_b p}{\log_b a}$$

となる。∎

この命題から次がわかる。

系 4.14 **(1)** $\log_a \dfrac{1}{p} = -\log_a p$.
(2) $\log_a \dfrac{p}{q} = \log_a p - \log_a q$

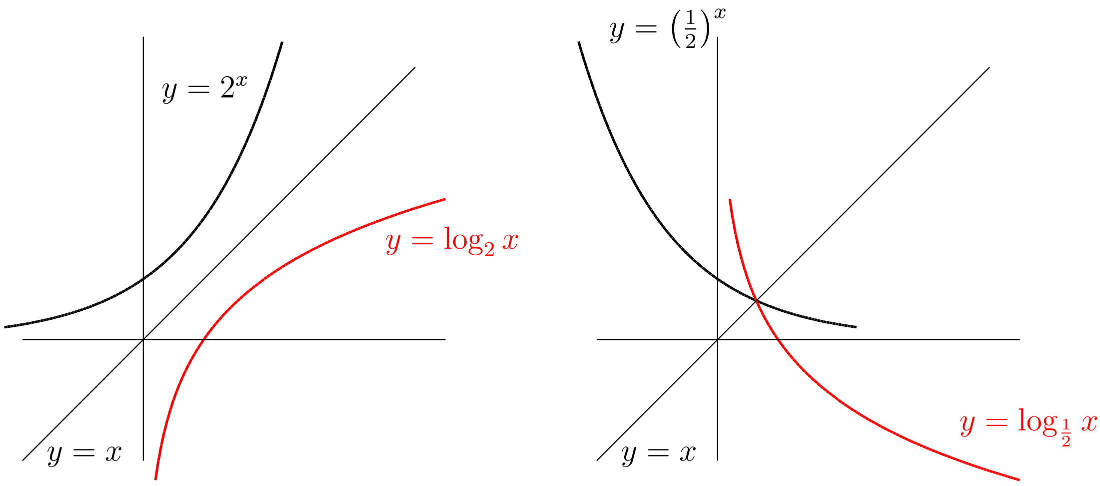
このように対数は，積の計算が和の計算に置き換わる，という画期的な性質を持っている。計算機などはなく，全てを手計算で行っていた時代では，これによる恩恵は，計り知れないものがある。対数は，スコットランドのジョン・ネイピア (1550–1617) とスイスのヨプスト・ビュルギ (1552–1652) によって同じ頃に発見されたと言われているが，世に知られて，広く使われるようになったのは，ネイピアによる著作「対数の驚くべき規則の叙述」(1614 年) と「対数の驚くべき規則の構成」(1619) による。これらの本の中には，ネイピアが 20 年かけて計算した詳細な対数表が含まれており (もちろん全て手計算であるにもかかわらず，ほとんど誤りがなかった)，その後のあらゆる分野における数値計算の労力を劇的に軽減した。その意味でネイピアは，その後の科学技術の発展に多大な貢献をなしたと言える。(実際にはその後，ヘンリー・ブリッグズ，アドリアン・ヴラックらがネイピアとの議論に基づいて対数表を改良し，より詳細な表を作って 1628 年に発表した。その対数表は 20 世紀に至るまで，ほとんど全ての対数表の基礎となった。)

ちなみに，自然対数の底 e を **ネイピアの定数** というが，実際，彼が最初に考えた対数は，e という数を意識はしていなかったが，基本的には自然対数であった。その後，より計算に便利な，10 を底とする常用対数を提案するようになる。

演習問題 4.9
(1) $a,\ b,\ c$ を正の実数とする。$a^b = c^{b\log_c a}$ を示せ。

(2) $a,\, b,\, c$ を正の実数とする。$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ を示せ。

対数関数のグラフ　対数関数は指数関数の逆関数なので，そのグラフは，対応する指数関数のグラフを $y = x$ に関して対称に写せばよい。



4.5　逆三角関数

三角関数 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を考えてみよう。逆関数は，全単射になっていなければ定義できない。$\sin x$, $\cos x$ は単射ではないのでこのままでは逆関数は定義できないしかし，積分等を扱うとき逆関数を考える必要があるので定義域を制限してでも逆関数を考える。

$\sin x$ や $\cos x$ がその上で全単射になるような区間は無数にあり，そのうちのどれを採用したとしても，そこに限定した $\sin x$ や $\cos x$ は，当然，逆関数を持つ。そのような区間として，最も「標準的な」ものとしては，次のようなものが考えられる。

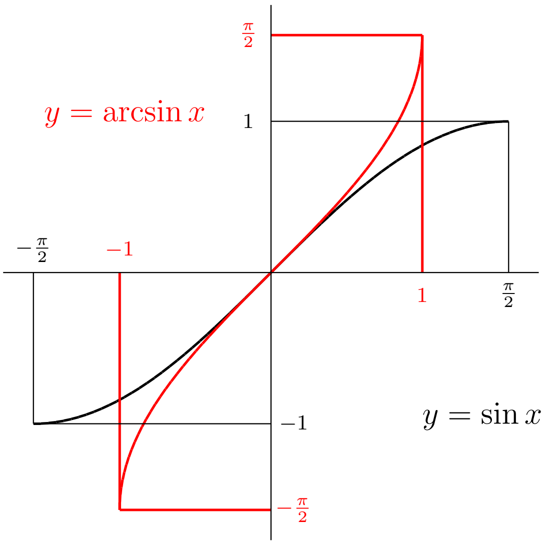
$f(x) = \sin x$ とする。この関数の定義域を $\left[-\dfrac{\pi}{2},\, \dfrac{\pi}{2} \right]$ に制限し，終域を $[\,-1,\, 1\,]$ に制限した関数 f (名前を変更する必要があるかもしれないが，ここでは混同して用いる) を

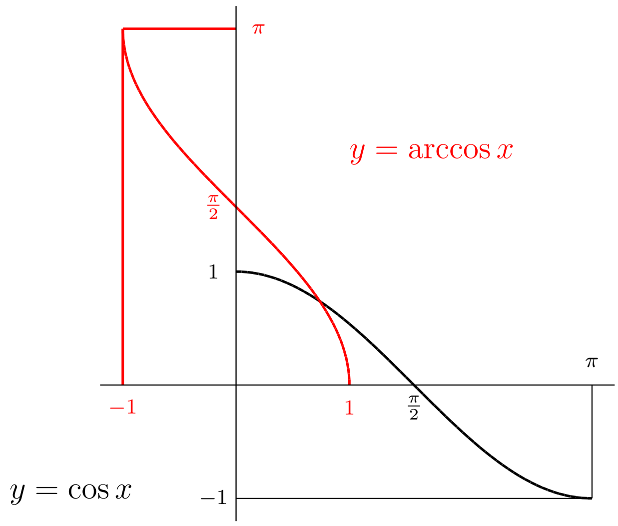
$$f : \left[-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2} \right] \longrightarrow [\,-1,\, 1\,]$$

とすると，f は全単射になる。従って，逆関数

$$f^{-1} : [\,-1,\, 1\,] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2} \right]$$

が存在する。これを $\arcsin x$ と書く (**アークサイン** と読む)。$\sin^{-1} x$ という記法も用いられるが，誤解を生みやすい記号なのでこの講義では採用しないことにする。





$g(x) = \cos x$ とする。この関数の定義域を $[\,0,\ \pi\,]$ に制限し，終域を $[\,-1,\ 1\,]$ に制限した関数 g (名前を変更する必要があるかもしれないが，ここでは混同して用いる) を

$$g : [\,0,\ \pi\,] \longrightarrow [\,-1,\ 1\,]$$

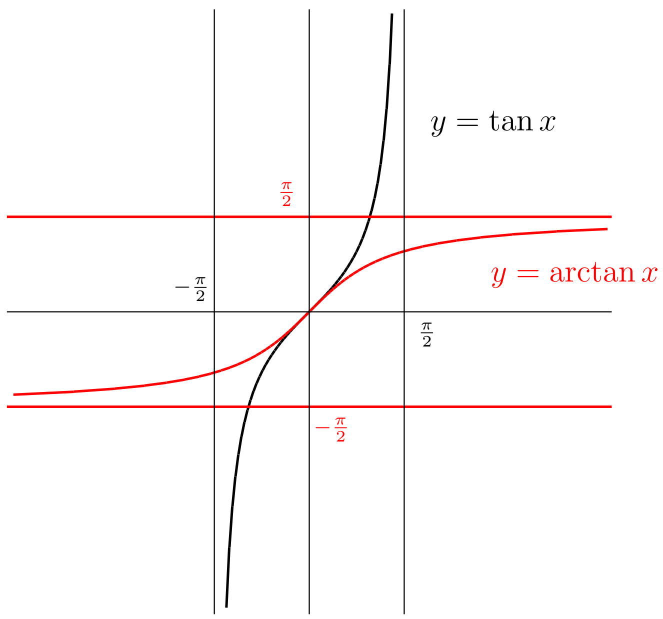
とすると，g は全単射になる。従って，逆関数

$$g^{-1} : [\,-1,\ 1\,] \longrightarrow [\,0,\ \pi\,]$$

が存在する。これを $\arccos x$ と書く (**アークコサイン**と読む)。$\cos^{-1} x$ という記法も用いられるが，誤解を生みやすい記号なのでこの講義では採用しないことにする。

$\tan x$ は $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ から $\mathbb{R}$ への全単射であるから，$\mathbb{R}$ から $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ への逆関数が存在する。これを $\arctan x$ などと書き，**アークタンジェント** x と読む。$\tan^{-1} x$ という記法も用いられるが，誤解を生みやすい記号なのでこの講義では採用しないことにする。

$\arctan x$ は実数全体で定義された関数なので，$\dfrac{\pi}{2} + n\pi$ という点で値が定義されない $\tan x$ と比べると，どうちらかと言うと，より「まともな」関数である，という見方もできる。



もう一度逆三角関数の定義を書いておく。三角関数の性質を逆三角関数の性質に「翻訳」する重要な定義である。

$$\begin{array}{lcll} y = \arcsin x & \Longleftrightarrow & x = \sin y & \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ y = \arccos x & \Longleftrightarrow & x = \cos y & (0 \leqq y \leqq \pi) \\ y = \arctan x & \Longleftrightarrow & x = \tan y & \left(-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right) \end{array}$$

逆三角関数は三角関数の逆関数として定義された新しい関数なので，その性質はすべて三角関数から「翻訳」される。

例えば $\arcsin 0$ を求めてみよう。$y = \arcsin 0$ とする。上の「翻訳」を用いると

$$y = \arcsin 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = \sin y \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

となる。$-\dfrac{\pi}{2}$ と $\dfrac{\pi}{2}$ の間で $\sin$ が 0 になるのは $y=0$ しかないので $y=0$ が結論される。

$\arcsin\dfrac{1}{10}=x, \arccos\dfrac{1}{10}=y$ のとき，x と y の関係を求める。

$$\arcsin\frac{1}{10}=x \iff \frac{1}{10}=\sin x \qquad \left(-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\arccos\frac{1}{10}=y \iff \frac{1}{10}=\cos y \qquad (0\leqq y\leqq\pi)$$

「翻訳」は終わったのであとはすべて三角関数の性質から導く。

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos y-\cos\frac{\pi}{2}\sin y=\cos y$$

より $\sin x=\dfrac{1}{10}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)$ が成立する。$0\leqq y\leqq\pi$ であるが，$\dfrac{1}{10}>0$ より $y\leqq\dfrac{\pi}{2}$ が成立している。$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ では $\sin$ は単射なので $x=\dfrac{\pi}{2}-y$ が成立する。

演習問題 4.10

(1) 次の値を求めよ。

$$\arcsin\frac{1}{2},\quad \arccos\frac{1}{2},\quad \arctan 1,\quad \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \arctan\sqrt{3},\quad \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2) 次の式を証明せよ。

(1) $\arccos\dfrac{4}{5}=\arcsin\dfrac{3}{5}$

(2) $\arcsin\dfrac{3}{5}+\arcsin\dfrac{5}{13}=\arcsin\dfrac{56}{65}$

(3) $\arccos\dfrac{24}{25}+\arccos\dfrac{12}{13}=\arcsin\dfrac{204}{325}$

(4) $4\arctan\dfrac{1}{5}-\arctan\dfrac{1}{239}=\dfrac{\pi}{4}$

(3) 次の式を簡単にせよ。

(1) $\arctan 2+\arctan 3$

(2) $\arcsin\dfrac{5}{13}+\arcsin\dfrac{12}{13}$

(4) 方程式 $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \arctan x$ をみたす x を求めよ。

(5) $-1 \leqq x \leqq 1$ の時，$\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(6) $x > 0$ の時，$\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(7) $\arctan x = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ を示せ。