数学序論問題解説 #5

河野

演習問題 2.1　次の集合を表せ。ただし例 2.1 (2) の形で表示せよ。
(1) 5 の倍数となるような自然数全体の集合
(2) 3 で割ると余りが 2 となるような自然数 全体の集合
(3) 5 で割ると余りが 3 となるような自然数 全体の集合
(4) 3 で割ると余りが 2 であり，5 で割ると余りが 3 となるような自然数全体の集合
　(ヒント：この集合の元はある数 (15 かな?) で割ると余りがある数である。)

この問題の解説は集合の包含関係なども既知として説明してあります。

(1)　「$\{5k \mid k \in \mathbb{N}\}$」とのみ書いてある解答も間違いとはいえないが，ここは集合の記号に慣れることが目的なので，詳しく (しつこく) 解答しておく。自然数 n を p で割った余りが r というのは講義で説明したように

$$\exists q \in \mathbb{Z} \quad n = pq + r \qquad (0 \leqq r < n)$$

である。

5 の倍数となるような自然数全体の集合を B と書くと $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ は 5 で割り切れる$\}$ となるが，前の注意を用いると

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{Z}\ n = 5k\}$$

とも書ける。

$A = \{5k \mid k \in \mathbb{N}\}$ とするとき $A = B$ であることを示せばよい。

$$A = B \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \subseteq B \quad \wedge \quad B \subseteq A$$

なので $A \subseteq B$ かつ $B \subseteq A$ を示す。最初に $A \subseteq B$ を示す。

$$A \subseteq B \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall a\ \ a \in A \Longrightarrow a \in B)$$

なので $a \in A$ となる任意の a をとる。このときある自然数 k が存在して $a = 5k$ と書ける。$5k$ は自然数 (自然数 $\times$ 自然数は自然数である) なので $a \in \mathbb{N}$ である。また $a = 5k\,(k \in \mathbb{N})$ なので $k \in \mathbb{Z}$ である。よって $a \in B$ となる。よって $A \subseteq B$ が成立する。

次に $B \subseteq A$ を示す。a を B の任意の元とする。a は 5 で割り切れる自然数なのである整数 k が存在して $a = 5k$ と書ける。ここで $k \leqq 0$ とすると $a = 5k \leqq 0$ となり自然数であることに矛盾，よって $k > 0$ である。k は整数なので $k \in \mathbb{N}$ となり，$a \in A$ となる。よって $B \subseteq A$ が成立する。

(2)　結論は $A = \{3k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ である。$A = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ は間違い。これでは 2 が A に含まれない。この表示では余りが直接は見にくいので $A = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{N}$ または $k = 0\}$ という書き方もできる。

$A = \{3k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$，$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{Z}\ x = 3k + 2\}$ とおくとき $A = B$ を示す。

最初に $A \subseteq B$ を示す。a を A の任意の元とすると，ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して $a = 3k - 1 = 3(k-1) + 2$ と書ける。ここで $k - 1 \in \mathbb{Z}$ であることに注意しておく。また $k \geqq 1$ より $3k - 1 \geqq 2 > 0$ となるので，a は自然数である。よって $a \in B$ となり，$A \subseteq B$ が成立する。

次に $B \subseteq A$ を示す。a を B の任意の元とすると，ある整数 k が存在して，$a = 3k + 2$ となる。ここで $k < 0$ とすると $k \leqq -1$ なので $a = 3k + 2 \leqq -3 + 2 = -1 < 0$ となる。これは a が自然数であることに矛盾するので，$k \geqq 0$ である。よって $j = k + 1$ とおくと $j \in \mathbb{N}$ であり，

$a=3k+2=3(j-1)+2=3j-1$ となる。よって $a\in A$ となり，$B\subseteq A$ が示された。以上により $A=B$ が成立する。

(3) 結論は $A=\{\,5k-2\,|\,k\in\mathbb{N}\,\}$ である。

$A=\{\,5k-2\,|\,k\in\mathbb{N}\,\}$，$B=\{\,x\in\mathbb{N}\,|\,\exists k\in\mathbb{Z}\ x=5k+3\,\}$ とおくとき $A=B$ を示す。

最初に $A\subseteq B$ を示す。a を A の任意の元とすると，ある $k\in\mathbb{N}$ が存在して $a=5k-2=5(k-1)+3$ と書ける。ここで $k-1\in\mathbb{Z}$ であることに注意しておく。また $k\geqq 1$ より $5k-2\geqq 3>0$ となるので，a は自然数である。よって $a\in B$ となり，$A\subseteq B$ が成立する。

次に $B\subseteq A$ を示す。a を B の任意の元とすると，a は5で割ると余り3なので，ある整数 k_0 が存在して，$a=5k_0+3$ となる。ここで $k_0<0$ とすると $k_0\leqq -1$ なので $a=5k_0+3\leqq -5+3=-2<0$ となる。これは a が自然数であることに矛盾するので，$k_0\geqq 0$ である。よって $k=k_0+1$ とおくと $k\in\mathbb{N}$ であり，$a=5k_0+3=5(k-1)+3=5k-2$ となる。よって $a\in A$ となり，$B\subseteq A$ が示された。以上により $A=B$ が成立する。

(4) 3 で割ると余りが 2 である集合と 5 で割ると余りが 3 である集合の共通部分を少し調べてみると，15 で割ると 8 余る集合になっていることが予想される。

$A=\{\,15k-7\,|\,k\in\mathbb{N}\,\}$，$B=\{\,x\in\mathbb{N}\,|\,\exists k_1\in\mathbb{Z}\ x=3k_1+2, \exists k_2\in\mathbb{Z}\ x=5k_2+3\,\}$ とするとき $A=B$ を示す。最初に $A\subseteq B$ を示す。a を A の任意の元とする。$a=15k-7\,(k\in\mathbb{N})$ と書かれているので，$a=3(5k-3)+2$ と書き直すことができる。ここで $5k-3\in\mathbb{Z}$ である。また $a=5(3k-2)+3$ と書ける。ここで $3k-2\in\mathbb{Z}$ である。また $k\geqq 1$ より $a=15k-7\geqq 8>0$ なので a は自然数である。以上により $a\in B$ が示される。よって $A\subseteq B$ が成立する。

次に $B\subseteq A$ を示す。a を B の任意の元とする。3 で割ると余りが 2 なので，ある整数 k_1 が存在して $a=3k_1+2$ と書ける。5 で割ると余りが 3 なのである整数 k_2 が存在して $a=5k_2+3$ と書ける。$5k_2+3=3k_1+2$ なので $5k_2+1=3k_1$ となっている。k_2 を 3 で割った余りを r とすると，ある整数 k_3 が存在して $k_2=3k_3+r$ と書ける。$r=0$ または 1 または 2 である。このとき $5(3k_3+r)+1=15k_3+5r+1=3k_1$ は 3 で割り切れる。$r=0$ のときこの数を 3 で割った余りが 1 になるので，$r\neq 0$ である。また $r=2$ のときこの数を 3 で割った余りは 2 になるので $r\neq 2$ である。$r=1$ のときは 3 で割り切れるので $r=1$ であることが分かる。よって $k_2=3k_3+1$ と書くことができる。

$$a=5k_2+3=5(3k_3+1)+3=15k_3+8=15(k_3+1)-7$$

となる。$k=k_3+1$ とおく。$k_3<0$ のとき $k_3\leqq -1$ なので

$$a=15k_3+8<-15+8=-7<0$$

となり a が自然数であることに矛盾，よって $k_3\geqq 0$ である。このとき $k\in\mathbb{N}$ となる。よって $a\in A$ であり，$B\subseteq A$ が成立する。よって $A=B$ が示された。

演習問題 2.2　次の集合 A に対しその部分集合をすべて列挙せよ。

(1) $A=\{\,1,2\,\}$　(2) $A=\{\,1,2,3\,\}$

(3) $A=\{\,1,2,3,4\,\}$

(1) 部分集合をすべて列挙すると $A_0=\{\,\}$,$A_1=\{\,1\,\}$,$A_2=\{\,2\,\}$,$A_3=\{\,1,2\,\}$ である。

(2) 部分集合をすべて列挙すると $A_1=\{\,\}$,$A_2=\{\,1\,\}$,$A_3=\{\,2\,\}$,$A_4=\{\,3\,\}$,$A_5=\{\,1,2\,\}$, $A_6=\{\,1,3\,\}$,$A_7=\{\,2,3\,\}$,$A_8=\{\,1,2,3\,\}$ である。

(3) 部分集合をすべて列挙すると $A_1 = \{\ \}$,$A_2 = \{1\}$,$A_3 = \{2\}$,$A_4 = \{3\}$,$A_5 = \{4\}$, $A_6 = \{1,2\}$,$A_7 = \{1,3\}$,$A_8 = \{1,4\}$, $A_9 = \{2,3\}$, $A_{10} = \{2,4\}$, $A_{11} = \{3,4\}$, $A_{12} = \{1,2,3\}$, $A_{13} = \{1,2,4\}$, $A_{14} = \{1,3,4\}$, $A_{15} = \{2,3,4\}$, $A_{16} = \{1,2,3,4\}$ である。

演習問題 2.3
(1) 例 2.3 の (2) を証明せよ。
(2) $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ ではないことを定義に基づいて証明せよ。
(3) $\mathbb{N} = \mathbb{Z}$ ではないことを定義に基づいて証明せよ。

(1) n を $\{4k \mid k \in \mathbb{N}\}$ の任意の元とすると，ある自然数 k が存在して $n = 4k$ と書ける。このとき $k_1 = 2k$ とおくと $n = 4k = 2 \cdot 2k = 2k_1$ なので $n \in \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ となっている。よって $\{4k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ が成立している。
(2) $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ の定義は $\mathbb{Z}$ の任意の元 a が $\mathbb{N}$ に含まれていることであった。即ち

$$\forall a \ \ a \in \mathbb{Z} \implies a \in \mathbb{N}$$

である。この命題の否定は

$$\exists a \ \ a \in \mathbb{Z} \wedge a \notin \mathbb{N}$$

である。a として -1 をとってくると $-1 \in \mathbb{Z}$ かつ $-1 \notin \mathbb{N}$ となっているので，否定命題が証明される。よってもとの $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ は正しくないことが示された。
(3) $\mathbb{N} = \mathbb{Z}$ の定義は $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ および $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ が共に成立することであった。(2) より $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ が成立しないので，$\mathbb{N} = \mathbb{Z}$ は成立しない。

演習問題 2.4 次の A, B,C に関し $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $A \cap C$, $A \cup C$,$(A \cap B) \cap C$,$(A \cup B) \cup C$ を求めよ。また $A \cap (B \cup C)$,$(A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C)$,$(A \cup B) \cap (A \cup C)$ を求めよ。
(1) $A = \{1,2,3,4\}$,$B = \{1,3,5,6\}$,$C = \{1,2,6,7\}$
(2) $A = \{1,2,3,4,5\}$,$B = \{1,2,3\}$,$C = \{5,6,7\}$
(3) $A = \{1,2,3,4\}$,$B = \{1,3,5\}$,$C = \{\ \}$

(1) $A \cap B = \{1,3\}$, $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B \cap C = \{1,6\}$, $B \cup C = \{1,2,3,5,6,7\}$, $A \cap C = \{1,2\}$, $A \cup C = \{1,2,3,4,6,7\}$, $(A \cap B) \cap C = \{1\}$, $(A \cup B) \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
$A \cap (B \cup C) = \{1,2,3,4\} \cap \{1,2,3,5,6,7\} = \{1,2,3\}$, $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1,3\} \cup \{1,2\} = \{1,2,3\}$, $A \cup (B \cap C) = \{1,2,3,4\} \cup \{1,6\} = \{1,2,3,4,6\}$, $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1,2,3,4,5,6\} \cap \{1,2,3,4,6,7\} = \{1,2,3,4,6\}$
(2) $A \cap B = \{1,2,3\}$, $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$, $B \cap C = \{\ \}$, $B \cup C = \{1,2,3,5,6,7\}$, $A \cap C = \{5\}$, $A \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $(A \cap B) \cap C = \{\ \}$, $(A \cup B) \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
$A \cap (B \cup C) = \{1,2,3,4,5\} \cap \{1,2,3,5,6,7\} = \{1,2,3,5\}$, $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1,2,3\} \cup \{5\} = \{1,2,3,5\}$, $A \cup (B \cap C) = \{1,2,3,4,5\} \cup \{\ \} = \{1,2,3,4,5\}$, $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1,2,3,4,5\} \cap \{1,2,3,4,5,6,7\} = \{1,2,3,4,5\}$
(3) $A \cap B = \{1,3\}$, $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$, $B \cap C = \{\ \}$, $B \cup C = \{1,3,5\}$, $A \cap C = \{\ \}$, $A \cup C = \{1,2,3,4\}$, $(A \cap B) \cap C = \{\ \}$, $(A \cup B) \cup C = \{1,2,3,4,5\}$

$A\cap(B\cup C)=\{1,2,3,4\}\cap\{1,3,5\}=\{1,3\}$, $(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{1,3\}\cup\{\ \}=\{1,3\}$, $A\cup(B\cap C)=\{1,2,3,4\}\cup\{\ \}=\{1,2,3,4\}$, $(A\cup B)\cap(A\cup C)=\{1,2,3,4,5\}\cap\{1,2,3,4\}=\{1,2,3,4\}$

演習問題 2.5　A, B, C を集合とする。
(1) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
(2) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

を証明せよ。

[**ヒント：**] これらは，２つの集合が等しい，ということを示す問題である。２つの集合 A, B が $A=B$ である，ということの定義は,「 $A\subseteq B$ かつ $B\subseteq A$ 」 ということだったので，$A=B$ を示せ，ということは,「 $A\subseteq B$ かつ $B\subseteq A$ 」 を示せ，ということである。

$A\subseteq B$ の定義は,「 A の全ての元が B に含まれる 」 ということだったので，上の問題 (1) について言うならば，$x\in A\cap(B\cup C)$ ならば $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ であることを示し，$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ ならば $x\in A\cap(B\cup C)$ であることを示せば良い，ということになる。

(1)　最初に $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$ を示す。x を $A\cap(B\cup C)$ の任意の元とする。このとき

$$x\in A \quad\wedge\quad x\in B\cup C$$

が成立している。これは

$$x\in A \quad\wedge\quad (x\in B\vee x\in C)$$

と同値である。論理のところで学んだように命題 P,Q,R に対し $P\wedge(Q\vee R)\equiv(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$ が成立する。よって上の命題は

$$(x\in A\wedge x\in B)\quad\vee\quad(x\in A\wedge x\in C)$$

と同値である。$x\in A\wedge x\in B$ は $x\in A\cap B$ と同値であり，$x\in A\wedge x\in C$ は $x\in A\cap C$ と同値なので

$$x\in A\cap B\vee x\in A\cap C$$

と同値である。よって

$$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

が成立することが分かり，$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$ が成立する。

逆に $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ ならば $x\in A\cap(B\cup C)$ であることを示す。x を $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ の任意の元とする。このとき

$$x\in A\cap B \quad\vee\quad x\in A\cap C$$

が成立している。上と同様に同値な命題で変形していくと順に

$$(x\in A\wedge x\in B)\quad\vee\quad(x\in A\wedge x\in C)$$

$$x\in A \quad\wedge\quad (x\in B\vee x\in C)$$

$$x\in A \quad\wedge\quad x\in B\cup C$$

となるので $x\in A\cap(B\cup C)$ が成立する。以上により $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ の成立が示される。

別の述べ方：任意の x に対し次が成立する。

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \wedge x \in B \cup C \\ &\iff x \in A \wedge \big(x \in B \vee x \in C\big) \\ &\iff \big(x \in A \wedge x \in B\big) \vee \big(x \in A \wedge x \in C\big) \\ &\iff \big(x \in A \cap B\big) \vee \big(x \in A \cap C\big) \\ &\iff x \in \big(A \cap B\big) \cup \big(A \cap C\big) \end{aligned}$$

以上により示された。途中論理の分配法則 $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ を使用した。

(2)　任意の x に対し次が成立する。

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\iff x \in A \vee x \in B \cap C \\ &\iff x \in A \vee \big(x \in B \wedge x \in C\big) \\ &\iff \big(x \in A \vee x \in B\big) \wedge \big(x \in A \vee x \in C\big) \\ &\iff \big(x \in A \cup B\big) \wedge \big(x \in A \cup C\big) \\ &\iff x \in \big(A \cup B\big) \cap \big(A \cup C\big) \end{aligned}$$

以上により示された。途中論理の分配法則 $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ を使用した。

演習問題 2.6　演習問題 2.4 の集合 A, B に対し $A - B$, A^c, $A \times B$ を求めよ。ただしここで全体集合は $X = \{1, 2, \ldots, 7\}$ とする。

(1)　$A = \{1, 2, 3, 4\}$，$B = \{1, 3, 5, 6\}$ なので，$A - B = \{2, 4\}$，$A^c = \{5, 6, 7\}$，$A \times B = \{(1,1),(1,3),(1,5),(1,6),(2,1),(2,3),(2,5),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5),(3,6),(4,1),(4,3),(4,5),(4,6)\}$
(2)　$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B = \{1, 2, 3\}$ なので，$A - B = \{4, 5\}$，$A^c = \{6, 7\}$，$A \times B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3)\}$
(3)　$A = \{1, 2, 3, 4\}$，$B = \{1, 3, 5\}$ なので，$A - B = \{2, 4\}$，$A^c = \{5, 6, 7\}$，$A \times B = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,1),(2,3),(2,5),(3,1),(3,3),(3,5),(4,1),(4,3),(4,5)\}$

演習問題 2.7　X を全体集合とし A と B をその部分集合とするとき，次を証明せよ。
(1) $B \subseteq A \iff B^c \supseteq A^c$
(2) De Morgan の法則

$$\begin{aligned} (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \\ (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c \end{aligned}$$

(1)　$A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}$，$B^c = \{x \in X \mid x \notin B\}$ である。$B \subseteq A$ が成立しているとすると，

$$\forall x \ \ x \in B \Longrightarrow x \in A$$

が成立している。条件の部分の対偶は $x \notin A \implies x \notin B$ なので上の命題は

$$\forall x \ \ x \notin A \implies x \notin B$$

と同値である。これは $A^c \subseteq B^c$ を意味している。

$B^c \supseteq A^c$ が成立しているとすると，

$$\forall x \ \ x \notin A \implies x \notin B$$

が成立している。条件の部分の対偶をとると

$$\forall x \ \ x \in B \implies x \in A$$

となる。よって $B \subseteq A$ が成立する。

(2) 最初に $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ を示す。そのためには $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$ および $(A \cup B)^c \supseteq A^c \cap B^c$ を示せばよい。

x を $(A \cup B)^c$ の任意の元とすると

$$x \notin A \cup B$$

が成立している。$x \in A$ とすると $x \in A \cup B$ となるので $x \notin A$ である。よって $x \in A^c$ が成立する。また $x \in B$ とすると $x \in A \cup B$ となるので $x \notin B$ である。よって $x \in B^c$ が成立する。よって $x \in A^c \cap B^c$ となる。以上で $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$ が示された。

x を $A^c \cap B^c$ の任意の元とすると

$$x \notin A \ \wedge \ x \notin B$$

が成立している。$x \in A \cup B$ とすると $x \in A$ または $x \in B$ が成立するが，上より共に成立しない。よって $x \notin A \cup B$ なので $x \in (A \cup B)^c$ となる。以上で $(A \cup B)^c \supseteq A^c \cap B^c$ が示された。$(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$ 及び $(A \cup B)^c \supseteq A^c \cap B^c$ が成立するので $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ が成立する。

次に $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ を示す。上で述べた様な証明もできるが，ここでは上の結果を用いる証明をすることにする。A，B に対し $C = A^c$，$D = B^c$ とおき，C，D に対し上の結果を適用する。

$$(C \cup D)^c = C^c \cap D^c$$

が成立している。この両者の補集合をとると $((C \cup D)^c)^c = C \cup D$ であることに注意すると

$$(C \cup D) = (C^c \cap D^c)^c$$

となる。$C^c = (A^c)^c = A$，$D^c = (B^c)^c = B$ を用いると

$$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$$

となる。これが求めるべきものであった。