

演習問題 6.1 次の定理は平均値の定理と呼ばれる。平均値の定理の成立を前提として命題 6.1 を証明せよ。

関数  $f$  が  $[a, b]$  で連続であり,  $(a, b)$  で微分可能であるとする。このときある実数  $c$  で  $a < c < b$  かつ

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を満たすものが存在する。

最初に,  $H(x)$  がある区間で恒等的に  $H'(x) = 0$  ならば  $H(x)$  は定数関数であることを示す。区間の中の実数  $a$  を 1 つ固定する。今  $x > a$  となる区間中の任意の  $x$  を考える。  $[a, x]$  として平均値の定理を適用すると, ある  $c$  で  $a < c < x$  かつ

$$H'(c) = \frac{H(x) - H(a)}{x - a}$$

を満たすものが存在する。  $H'(c) = 0$  なので  $H(x) = H(a)$  が成立する。  $x < a$  となる区間中の任意の  $x$  を考える。  $[x, a]$  として平均値の定理を適用すると, ある  $c$  で  $x < c < a$  かつ

$$H'(c) = \frac{H(a) - H(x)}{a - x}$$

を満たすものが存在する。  $H'(c) = 0$  なので  $H(x) = H(a)$  が成立する。  $x = a$  のときは  $H(x) = H(a)$  である。よって任意の  $x$  に対し  $H(x) = H(a)$  が成立するので,  $H(x)$  は定数関数である。

次に命題 6.1 を証明する。  $H(x) = G(x) - F(x)$  とおくと  $H'(x) = G'(x) - F'(x)$  より  $H'(x) = 0$  となる。よって  $H(x)$  は定数関数である。これを  $H(x) = C$  とおく。このとき  $G(x) - F(x) = H(x) = C$  なので  $G(x) = F(x) + C$  が成立する。

演習問題 6.2 命題 6.2 及び命題 6.3 を証明せよ。

命題 6.2 (1) はすでに示してあるので (2) を示す。  $F'(x) = f(x)$  とおくと  $F(x) = \int f(x) dx$  である。  $(aF(x))' = aF'(x) = af(x)$  なので

$$\int af(x) dx = aF(x) = a \int f(x) dx$$

となる。

命題 6.3 は微分法で学んだ関数の導関数と積分の定義から出てくる。即ち

$$\int f(x) dx = F(x)$$

を示すためには

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

を示せばよい。

(1) は要綱に書いてある。(2) は演習問題 5.15 を参考にすると,  $(\log|x|)' = \frac{1}{x}$  が成立することから従う。(3)–(8) はそれぞれ  $(\sin x)' = \cos x$ ,  $(-\cos x)' = \sin x$ ,  $(e^x)' = e^x$ ,  $\left(\frac{a^x}{\log a}\right)' = \frac{1}{\log a} \log a a^x = a^x$ ,  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$  から結論が得られる。

**演習問題 6.3** 次の関数の不定積分を求めよ。

- |                           |                   |                        |                   |
|---------------------------|-------------------|------------------------|-------------------|
| (1) $(2x+5)^6$            | (2) $e^{-2x}$     | (3) $\sin \frac{x}{2}$ | (4) $x(3x^2+1)^8$ |
| (5) $\frac{x}{(1+x^2)^3}$ | (6) $xe^{3x}$     | (7) $x^2e^{3x}$        | (8) $\tan x$      |
| (9) $x \sin x$            | (10) $x^2 \cos x$ | (11) $x^3 \log x$      | (12) $(\log x)^2$ |
| (13) $\arctan x$          | (14) $\arcsin x$  | (15) $e^x \sin x$      | (16) $e^x \cos x$ |

(1) 置換積分法を使う。  $t = 2x + 5$  と置くと  $\frac{dt}{dx} = 2$  より  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$  となる。よって

$$\begin{aligned} \int (2x+5)^6 dx &= \int t^6 \frac{dx}{dt} dt = \int t^6 \frac{1}{2} dt \\ &= \frac{1}{2 \cdot 7} t^7 = \frac{1}{14} (2x+5)^7 \end{aligned}$$

(2)  $t = -2x$  とおくと  $\frac{dt}{dx} = -2$  より  $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}$  となる。よって

$$\begin{aligned} \int e^{-2x} dx &= \int e^t \frac{dx}{dt} dt = -\frac{1}{2} \int e^t dt \\ &= -\frac{1}{2} e^t = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{aligned}$$

(3)  $t = \frac{x}{2}$  とおくと,  $x = 2t$  より  $\frac{dx}{dt} = 2$  となる。よって

$$\int \sin \frac{x}{2} dx = \int \sin t \frac{dx}{dt} dt = -2 \cos t = -2 \cos \frac{x}{2}$$

となる。

(4)  $t = 3x^2 + 1$  とおくと  $\frac{dt}{dx} = 6x$  より  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{6x}$  となる。よって

$$\begin{aligned} \int x(3x^2+1)^8 dx &= \int xt^8 \frac{1}{6x} dt = \frac{1}{6} \int t^8 dt \\ &= \frac{1}{6} \frac{1}{9} t^9 = \frac{1}{54} (3x^2+1)^9 \end{aligned}$$

(5)  $t = 1 + x^2$  とおくと  $\frac{dt}{dx} = 2x$  より  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2t}$  となる。よって

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(1+x^2)^3} dx &= \int \frac{x}{t^3} \frac{1}{2x} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^3} dt \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \right) t^{-2} = -\frac{1}{4(1+x^2)^2}\end{aligned}$$

ここから部分積分法の問題がでてくる。部分積分法は

$$\int f'g dx = fg - \int f'g dx$$

というものであった。

(6)  $g = x$ ,  $f' = e^{3x}$  とおくと

$$f = \int f' dx = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x}$$

なので

$$\begin{aligned}\int xe^{3x} dx &= \int \left( \frac{1}{3}e^{3x} \right)' x dx = \int f'g dx \\ &= fg - \int fg' dx \\ &= \frac{x}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}x^{3x} dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}\end{aligned}$$

(7)  $g = x^2$ ,  $f' = e^{3x}$  とおくと

$$f = \int f' dx = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x}$$

なので

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{3x} dx &= fg - \int fg' dx \\ &= \frac{x^2}{3}e^{3x} - \int 2x \frac{1}{3}e^{3x} dx\end{aligned}$$

ここでもう一度部分積分を実行すると

$$= \left( \frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{2}{27} \right) e^{3x}$$

(8)  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{(\cos x)'}{\cos x}$  なので  $t = \cos x$  とおくと,  $\frac{dt}{dx} = -\sin x$  より  $dx = -\frac{1}{\sin x} dt$  と変形すると

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \frac{-1}{\sin x} dt = -\int \frac{1}{t} dt = -\log |\cos x|$$

(9)  $g = x$ ,  $f' = \sin x$  とおくと  $f = \int f' dx = \int \sin x dx = -\cos x$  なので

$$\begin{aligned}\int x \sin x dx &= fg - \int fg' dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x\end{aligned}$$

(10)  $g = x^2$ ,  $f' = \cos x$  とおくと  $f = \int f' dx = \int \cos x dx = \sin x$  なので

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos x dx &= fg - \int fg' dx \\ &= x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx \\ &= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx\end{aligned}$$

となる。部分積分をもう一度実行すると

$$\begin{aligned}&= x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \sin x) \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x\end{aligned}$$

(11)  $f' = x^3$ ,  $g = \log x$  とおくと  $f = \frac{1}{4}x^4$  なので

$$\begin{aligned}\int x^3 \log x dx &= fg - \int fg' dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 \log x - \int \frac{1}{4}x^4 \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 \log x - \frac{1}{4} \int x^3 dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 \log x - \frac{1}{16}x^4\end{aligned}$$

(12)  $f' = 1$ ,  $g = (\log x)^2$  とおくと  $f = x$  なので

$$\begin{aligned}\int (\log x)^2 dx &= fg - \int fg' dx \\ &= x(\log x)^2 - \int x \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x(\log x)^2 - 2 \int \log x dx \\ &= x(\log x)^2 - 2x \log x + 2x\end{aligned}$$

となる。計算には

$$\int \log x dx = x \log x - x$$

を用いた。

(13)  $f' = 1, g = \arctan x$  とおくと  $f = x, g' = \frac{1}{1+x^2}$  なので

$$\begin{aligned}\int \arctan x \, dx &= fg - \int fg' \, dx \\ &= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx\end{aligned}$$

となる。ここで  $t = 1 + x^2$  とおくと

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+x^2} \, dx &= \int \frac{x}{t} \frac{1}{2x} \, dt = \int \frac{1}{2} \frac{1}{t} \, dt \\ &= \frac{1}{2} \log |t| = \frac{1}{2} \log |1+x^2| = \frac{1}{2} \log(1+x^2)\end{aligned}$$

なので

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$$

となる。演習問題 5.21 も参考のこと。

(14)  $f' = 1, g = \arcsin x$  とおくと  $f = x, g' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  なので

$$\begin{aligned}\int \arcsin x \, dx &= fg - \int fg' \, dx \\ &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx\end{aligned}$$

となる。ここで  $t = 1 - x^2$  とおくと  $\frac{dt}{dx} = -2x$  なので

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx &= \int \frac{x}{\sqrt{t}} \frac{1}{-2x} \, dt = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t}} \, dt \\ &= -\sqrt{t} = -\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

(15) (16) 両方まとめて解く。  $I = \int e^x \sin x \, dx, J = \int e^x \cos x \, dx$  とおく。  $f' = e^x, g = \sin x$  とおくと

$$I = fg - \int fg' \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - J$$

となる。一方  $f' = e^x, g = \cos x$  とおくと

$$J = fg - \int fg' \, dx = e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) \, dx = e^x \cos x + I$$

となる。2式を連立されて解くと

$$I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$$

$$J = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x)$$