

数学序論演習に対する追加説明#1

形式

- 学籍番号は次の様にして下さい。
 - 1年生は出席番号を書いて下さい。
学籍番号の下5桁から下2桁部分を抜き出し先頭部分に何個かの0があればそれを削除したもの。例えば学籍番号が131080005xであれば5, 131080038xであれば38, 131080157xであれば157, 131088088xであれば8088です。
 - 2年生以上は10桁の学籍番号を書いて下さい。
- 用紙を置く場所を間違えないで下さい。

内容

- 解答は他人が読んで理解可能なように書く必要があります。書く途中および書上げたら「他人の目」で推敲して、他人が読んで分かるかをチェックしてください。特に高校でそのような訓練をしていない人は最初は意識的に推敲をして下さい。
- 真理表しか書いていない人がたくさんいました。真理表だけでは説明になっていません。真理表からどうして同値と分かるのか、理由を理解しているかが読む人(私)に分かるように書かれていなければ証明とはいえません。
- 「よって同値である」だけの説明もどうして「よって」なのか分かりません。
- 「真理表より同値であることが分かる」も前項とほとんど同じでダメです。理由を書いてください。
- X と Y が同値というのは「 X が真なら Y は真, Y が真なら X が真」ということなので、そのことを書いてあれば書き方は色々あります。
例えば「 X と Y の対応する欄の真偽が一致しているので同値である。」は1つの例でしょう。
解説を載せたのでそれを参考に(勿論解説と同じでなければならぬということはない)。

- ベン図を用いて解答した人がいました。ベン図は視覚的なので、考える手段として有効ですが、ベン図を描くことイコール証明ではないので、別の手段で証明することが必要です。
- 真理表に関して理解が不十分な人が若干いたので、再度説明する。

真理表は真偽のすべての場合を記述する欄とそれに対応して真偽が決まる欄からなる。真偽のすべての場合を記述する欄が縦にいくつの行が必要かということは記述する欄に入る命題の個数に依存する。

(1) $\neg(\neg P) \equiv P$ の場合記述する欄に入る命題の個数は 1 個なので行は 2 行である。

(4) $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$ の場合命題の個数は 2 個なので行は 4 行必要になる。

(3) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ の場合命題の個数は 3 個なので行は 8 行必要になる。

一般に命題の個数が k 個のとき行は 2^k 行必要になる。

P
T
F

P	Q
T	T
T	F
F	T
F	F

P	Q	R
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

この欄の右に真偽を記述するのに必要な欄を書いていく。

(1) の場合必要なのは $\neg(\neg P)$ であるが、この真偽を見るために $\neg P$ も必要なのでこの欄も書くと、真理表は次の様になる。

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
T	F	T
F	T	F

P と $\neg(\neg P)$ の対応する欄の真偽が同じなので同値であることが分かる。

この証明は同値の性質を使っているが、定義に基づいてもできる。 $P \equiv \neg(\neg P)$ の定義は

$$P \implies \neg(\neg P) \quad P \longleftarrow \neg(\neg P)$$

がともに真であることだった。

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$	$P \implies \neg(\neg P)$	$P \longleftarrow \neg(\neg P)$
T	F	T	T	T
F	T	F	T	T

真理表より $P \implies \neg(\neg P), P \longleftarrow \neg(\neg P)$ がともに真なので同値である。

後者は煩雑なので前者の証明の方が簡単である。

(4) の場合 $P \wedge Q, \neg(P \wedge Q), \neg P, \neg Q, (\neg P) \vee (\neg Q)$ が必要になる。

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

$\neg(P \wedge Q)$ と $(\neg P) \vee (\neg Q)$ の対応する欄の真偽が同じなので同値であることが分かる。

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

(3) の場合は上の様になっており、 $P \vee (Q \wedge R), (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ の対応する欄の真偽が同じなので同値である。