数学序論演習に対する追加説明#2

形式

- 学籍番号は次の様に書くこと。
  - 1 年生は出席番号を書くこと。
    学籍番号の下 5 桁から下 2 桁部分を抜き出し先頭部分に何個かの 0 があればそれを削除したもの。例えば学籍番号が **141080005x** であれば **5**，**141080038x** であれば **38**，**141080157x** であれば **157**，**141088088x** であれば **8088** となる。
  - 2 年生以上は 10 桁の学籍番号を書くこと。
- 用紙を置く場所を間違えないこと。
- **番号が正しく書かれていないものは今後未提出とみなす。**

内容

- 結論だけ書いてある答案は，仮に結論があっていてもテストのように採点をすれば 0 点である。

  「理由を書け」と言ったので理由らしきものが書いてあるが理由になっていないものも多い。

- 「$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^4 - x^2 + \dfrac{1}{5} \geqq 0$」を例にとる。

- 「$x^4 - x^2 + \dfrac{1}{5}$ は必ず 0 以上になるので真である」というのは理由にはならない。(「真」というのも間違っているが，今はそのことは問題にしない)

  P という命題を証明するのに「P が正しいので P が示された。」と書いてあるのと同じである。

- 「x にどのような数をいれても 0 より大きくなるので命題は正しい」というのもダメである。「どのような数をいれても」と書いてあるが，実数は無限集合なので，このことを実際に行うことは不可能である。

  実行不可能なことを根拠にすることはできない。

- このことは無限集合と有限集合で異なる。$X = \{1, 2, 3\}$ とする。

$$\forall x \in X \quad x^4 - x^2 + \frac{1}{5} \geqq 0$$

という命題であれば，すべての x について代入して計算することで命題の真偽を確かめることができる。今の場合 $x = 1, 2, 3$ を代入すると

$$1^4 - 1^2 + \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \geqq 0$$
$$2^4 - 2^2 + \frac{1}{5} = 12 + \frac{1}{5} \geqq 0$$
$$3^4 - 3^2 + \frac{1}{5} = 72 + \frac{1}{5} \geqq 0$$

となるので「どのような数をいれても 0 より大きくなるので命題は正しい」という議論は正しい議論と言える。

しかし $\mathbb{R}$ は無限集合なので，すべての場合計算することは不可能である。他の手段で (何か実数の性質を用いて) 真偽を判定する必要がある。

- 「$\exists x \in \mathbb{R} \quad x^4 - x^2 + \frac{1}{5} < 0$ は偽。$x = 1$ が反例」という解答があった。これは「存在」と「任意」に関連するので説明をする。

これが「$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^4 - x^2 + \frac{1}{5} < 0$ は偽。$x = 1$ が反例」というのであれば正しい議論である。

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^4 - x^2 + \frac{1}{5} < 0$$

の否定命題は

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad x^4 - x^2 + \frac{1}{5} \geq 0$$

であり，$x = 1$ は

$$1^4 - 1^2 + \frac{1}{5} \geq 0$$

なので否定命題が成立し，もとの命題は偽であることが分かる。しかし

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad x^4 - x^2 + \frac{1}{5} < 0$$

の否定命題は

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^4 - x^2 + \frac{1}{5} \geq 0$$

である。

$$1^4 - 1^2 + \frac{1}{5} > 0$$

は成立するが，否定命題が成立するとはいえない。この意味で $x = 1$ は反例にはなっていない。

- 「$\forall, \exists$」の入った命題の否定に関しては多くの人ができるようになっている。しかし，命題の内容を考えて真偽を判断するところは不十分な人が多い。

- 最初は一般的な数学の学習の仕方について。

  数学は論理の積み重ねであるから，要綱・演習問題で分からない所があれば，その部分より前に書いてあることの理解が不十分なわけである。例えば演習問題 1.5 で

  $$\forall x \in \mathbb{R} \quad a < x \implies b < x$$

  という命題の否定命題をつくれないときは，(1)「$\forall x$」の否定が分からないなら，少し前の部分を見ればよいし，(2)「$a < x \implies b < x$」の否定が分からないときは 1.1 節を見る必要がある。

  この様に自分の分からない所を自分で見つけることが有効な学習の仕方であろう。

  どこでやったか記憶にないときは，要綱を順にさかのぼりながら見て探すのも 1 つの方法である。

- 前にも言ったが，**理由を書くこと**。
  演習問題で「真偽を判定せよ」とあるとき，これは「結論だけ述べよ」という意味ではなく,「どうしてそうなるかの理由」・「判定の根拠」を示すことが**必ず**必要である。**これからの演習問題も常にそういう意味だと理解すること**。

- 前項と関連して「どの様に書けばよいのか分からない」という質問をうけたので，ことに関して述べておく。このようなときには 2 通りの場合が考えられる。(1) 本当に書き方**だけ**が分からない場合，(2) 内容の理解が不十分な場合，である。

「どの様に書けばよいのか分からない」と質問してくる人の多くは (1) の書き方の問題ではなく，(2) の内容理解の問題である。(2) に関しては後で述べるとして，ここでは (1) について述べる。(前にも述べたが…)

自分の頭の中に，演習問題を解いている自分とは別に，**他人の立場で**その演習問題の解答を読んでいる自分を想定する。その他人である自分が，自分である自分の書いたものを読んで，**論理が追えて**正しいと思えたら OK。最初は慣れないと思うが，少し訓練するとできるようになると思う。他人として**融通のきかない** computer を想定するのも 1 つの方法である。

- 自分が内容を理解しているのか and/or してないのかを自分で正確に把握することは非常に重要である。それができると理解への道の 50%以上の場所にいると言える。

  自己把握に関して言うと次の様な段階が考えられる。

  (1) 理解してないのに理解していると誤解している。
  (2) 理解が不十分でかつどこが理解できていないかを把握できていない。所謂「なんとなく分からない」状態。
  (3) 理解が不十分だがどこが理解できていないかを把握している。
  (4) 正確に理解している。

  (2) を (3) に変える所が理解の最も重要な階梯だと言える。

- 演習問題 1.5 を解説する。

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a < x \implies b < x$$

という命題を P とする。P の否定命題 $\neg P$ は

$$\exists x \in \mathbb{R} \;\; a < x \wedge x \leqq b$$

となる。

「$a < b$」という命題を Q とおく。$\neg P$ が真のとき

$$a < x \;\wedge\; x \leqq b \quad\implies\quad a < b$$

より Q も真になる。よって

$$\neg P \implies Q$$

が成立する。この段階で $\neg P$ と Q が同値としてしまった人が若干いたが，この段階では同値は示されていない。$Q \implies \neg P$ を示すことが必要である。そのためには Q が真のとき $\neg P$ の性質をもつ x を見つければよい。

Q が真だとする。$x = \dfrac{a+b}{2}$ とおくと $a < x < b$ を満たす。よって

$$Q \implies \neg P$$

が成立する。以上により $\neg P$ と Q は同値である。即ち

$$\neg P \quad \equiv \quad Q$$

が成立する。これより

$$P \quad \equiv \quad \neg Q$$

である。以上により $\neg Q$ が真のとき即ち $a \geqq b$ のとき命題 P は真であり，$a < b$ のとき偽であることが分かる。

- 演習問題 1.6 を解説する。

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x > y$$

と

$$\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} \quad x > y$$

の真偽を考察せよ，というのが問題であった。

「任意」と「存在」が 2 つ以上あるときは次のように考えるものよいかもしれない。自分と相手でゲームをしている。自分は命題を成立させたいと思い，相手は命題が成立させたくないと思っているとする。

「任意」は相手が選び,「存在」は自分が選ぶと考える。

前者の命題は相手が実数 x をどの様に選んでも，それに対応して自分が $x > y$ となる y を選べるかという問題になる。これは当然可能なので前者は正しい命題である。

後者の命題は最初に自分が y を選ばなくてはならない。どのような y を選ぶかというと任意の x に対して $x > y$ となる y であるが，そのような y は存在しないので選ぶことができない。よって後者は正しくない命題である。