数学序論追加説明#4

- 部分集合の概念は重要なので昨年の試験問題を例に追加説明する。昨年度の数学序論第 1 回試験の問 6 は次である。

(1) 集合 A, B が $A \subseteq B$ であることの定義は

$$\forall a \;\; a \in A \implies a \in B$$

であるがこの否定命題を述べよ。
(2) $\mathbb{Q}$ を有理数全体からなる集合，$\mathbb{Z}$ を整数全体からなる集合とする。$\mathbb{Z} \supseteq \mathbb{Q}$ が成立する場合は証明し，成立しない場合はそのことを証明せよ。
(3) $\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$ が成立する場合は証明し，成立しない場合はそのことを証明せよ。

- (1) は集合の問題のように見えるが，実態は論理の問題である。
(a) 「任意」の入った命題の否定を理解しているか
(b) $P \implies Q$ の否定はどうなるかを理解しているか
の 2 つを見る問題である。

- (a)「$\forall x \; P(x)$」の否定は「$\exists x \; \neg P(x)$」であり，(b)「$P \implies Q$」の否定は「$P \wedge \neg Q$」なので，$A \subseteq B$ の否定，すなわち A が B の部分集合でないことは

$$\exists a \qquad a \in A \wedge a \notin B$$

である。

- (a)，(b) に関して一言。形式的に理解して暗記する人も多いが，それでは対応が難しくなると思われる。「論理の中身」をきちんと理解しておけば，論理的に考えれば結論は自然に出てくる。

$$P \implies Q$$

という命題の主要な内容は「P が正しければ Q が正しい」という主張である。この主張を否定しようと思うならば，このことが正しくないこと，すなわち，P が正しいのに，Q が正しくないことを示せばよい。

$$P \text{ が正しい} \wedge Q \text{ が正しくない} \equiv P \wedge \neg Q \text{ が正しい}$$

ことから前述の結論を得る。

- 次は (2) だが，勿論 $\mathbb{Z} \supseteq \mathbb{Q}$ は成立しないが，それを**定義に基づいて**きちんと証明することが求められている。

- (1) の結果より $\mathbb{Z} \supseteq \mathbb{Q}$ が成立するときは

$$\forall a \quad a \in \mathbb{Q} \implies a \in \mathbb{Z}$$

が成立し，$\mathbb{Z} \supseteq \mathbb{Q}$ が成立しないときは

$$\exists a \quad a \in \mathbb{Q} \wedge a \notin \mathbb{Z}$$

が成立する。

- 勿論後者が成立する。それを示すためには上の様な a が存在することを言えばよい。「存在」は自分で選んでくればよいので，例えば，$a = \dfrac{1}{2}$ とすると，$a \in \mathbb{Q}$ であるが $a \notin \mathbb{Z}$ なので，$\mathbb{Z} \supseteq \mathbb{Q}$ が成立しないことが分かる。

- (3) は「集合が等しい」ことの定義を理解しているかを問う問題である。$A = B$ の定義は

$$A \subseteq B \quad \wedge \quad B \subseteq A$$

なので等号成立のためには上の 2 つを示せばよい。今の場合

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \quad \wedge \quad \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z}$$

が成立すれば等号が成立する。しかし (2) で示したように $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z}$ は成立しない。よって $\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$ も成立しない。

- 次に写像も問題を考える。写像では全射・単射の概念をきちんと理解することが大切である。例として一昨年度の数学序論第 1 回試験の問 7 を考える。

> 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射であるとは,
>
> $$\forall x_1, x_2 \in X \ \ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$
>
> が成立することである。写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射であるとは,
>
> $$\forall y \in Y \ \exists x \in X \ \ y = f(x)$$
>
> が成立することである。このとき次の問いに答えよ。
>
> (1) 「写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射でない」という命題を論理記号を用いて表せ。
>
> (2) 「写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射でない」という命題を論理記号を用いて表せ。
>
> (3) $A = \{\,1, 2, 3\,\}$, $b = \{\,1, 2\,\}$ $f : A \longrightarrow B$ を $f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 2$ で定義する。このとき f が全単射であるかどうか理由をつけて述べよ。
>
> (4) 写像 $f : [\,0, \infty\,) \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定義する。このとき f が全単射であるかどうか理由をつけて述べよ。ここで $\mathbb{R}$ は実数全体のつくる集合である。

- (1), (2) は写像の問題に見えるが，実態は論理の問題である。最初の (a), (b) で説明したことから単射であることの否定は

  $$\exists x_1, x_2 \in X \ x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$$

  であり，全射の否定は

  $$\exists y \in Y \ \forall x \in X \ y \neq f(x)$$

  である。

- (3), (4) は与えられた写像が全単射かどうかという問題である。全単射は全射かつ単射なので一方が成立しなければ全単射ではない。

- (3) は $1 \neq 3$ なのに $f(1) = 2 = f(3)$ なので単射ではない。よって全単射ではない。

- (4) は $-1 \in \mathbb{R}$ 次の性質を持つので全射ではない。任意の $x \in [0, \infty)$ に対し $f(x) = x^2 \geq 0$ なので $f(x) \neq -1$ である。よって全単射でない。