

数学序論追加説明#6

- 三角関数の加法定理から導かれる諸公式について説明する。
- 高校時代は加法定理としてとらえる他なかったが、オイラーの公式を学んだので、そちらの立場から求めることもできる。解説には両方のせてあるので、そちらも参考に。
- 加法定理は以下の式である。

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

これをオイラーの公式を用いて表すと

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$$

となる。オイラーの式の方が簡単に見える。実際証明も簡単な場合がある。

- 練習問題 4.4 (1) をオイラーを用いて示してみる。(1) は以下の式である。

$$\begin{aligned}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x, & \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= -\cos x \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x, & \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin x\end{aligned}$$

$\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = i$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \exp\left(i\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \exp\left(ix + i\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \exp(ix) \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = (\cos x + i \sin x) i \\ &= -\sin x + i \cos x\end{aligned}$$

両辺を比較して $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

が得られる。 $\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) = -i$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \exp\left(i\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \exp\left(ix - i\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \exp(ix) \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) = (\cos x + i \sin x) (-i) \\ &= \sin x - i \cos x\end{aligned}$$

両辺を比較して $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$, $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$ が得られる。

- (5) 3倍角の公式を示そう。

$$\begin{aligned}\cos 3\theta + i \sin 3\theta &= e^{i3\theta} = (e^{i\theta})^3 = (\cos \theta + i \sin \theta)^3 \\ &= \cos^3 \theta + 3 \cos^2 \theta i \sin \theta + 3 \cos \theta i^2 \sin^2 \theta + i^3 \sin^3 \theta \\ &= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta + i (3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta)\end{aligned}$$

このままでもよいが, $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ を用いて変形すると

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) \\ &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \\ \sin 3\theta &= 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta = 3 (1 - \sin^2 \theta) \sin \theta - \sin^3 \theta \\ &= -4 \sin^3 \theta + 3 \sin \theta\end{aligned}$$

- (7) 和積公式を1つ示そう。 $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$ より

$$\begin{aligned}e^{-ix} &= e^{i(-x)} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x \\ e^{ix} + e^{-ix} &= \cos x + i \sin x + \cos x - i \sin x = 2 \cos x \\ e^{ix} - e^{-ix} &= \cos x + i \sin x - \cos x + i \sin x = 2i \sin x\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, & \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\ 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) &= 2 \frac{1}{2i} \left(\exp\left(i \frac{\alpha + \beta}{2}\right) - \exp\left(-i \frac{\alpha + \beta}{2}\right) \right) \frac{1}{2} \left(\exp\left(i \frac{\alpha - \beta}{2}\right) + \exp\left(-i \frac{\alpha - \beta}{2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\exp\left(i \frac{\alpha}{2}\right) \exp\left(i \frac{\beta}{2}\right) - \exp\left(-i \frac{\alpha}{2}\right) \exp\left(-i \frac{\beta}{2}\right) \right) \times \\ &\quad \left(\exp\left(i \frac{\alpha}{2}\right) \exp\left(-i \frac{\beta}{2}\right) + \exp\left(-i \frac{\alpha}{2}\right) \exp\left(i \frac{\beta}{2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2i} (\exp(i\alpha) - \exp(-i\beta) + \exp(i\beta) - \exp(-i\alpha)) \\ &= \frac{1}{2i} (\exp(i\alpha) - \exp(-i\alpha) + \exp(i\beta) - \exp(-i\beta)) \\ &= \sin \alpha + \sin \beta\end{aligned}$$