

数学序論追加説明#7

- 自然数・整数に対する指数法則の証明の問題で次のような「解答」があった。

a^{m+n} の対数をとると

$$\begin{aligned}\log a^{m+n} &= (m+n)\log a = m\log a + n\log a \\ &= \log a^m + \log a^n = \log a^m a^n\end{aligned}$$

対数関数は単射なので $a^{m+n} = a^m a^n$ となる。

- この様な「解答」は成立を仮定してよい命題が何かということを理解していないために起こる。理論構造の中で今解こうとしている演習問題がという位置にあるかを理解していればこのような解答にならないはずである。
- この段階では指数関数を定義するために、指数の性質を調べている。指数が実数の場合まで拡張して指数関数を考え、その関数が単射ということが分かって初めて、対数関数が定義される。この段階では対数関数を定義することはできない。
- 証明の途中で

$$\log pq = \log p + \log q$$

という「対数法則」を使っている。この「対数法則」は指数法則と同値であり、 P を証明するのに、 P の成立を仮定して証明している。