数学序論追加説明#8

- 数列の極限を考えるとき「増大度」を知っていると極限を値が予想でき，また求める方針も立てやすいかもしれない。

- ここでは項がすべて正の数列を考える。2 つの数列 a_n, b_n に対して
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$$
が成立するとき b_n は a_n より増大度が大きいということにする。

- 例 5.6 では
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$$
を示したが，これは階乗の方が指数関数より増大度が多いことを意味する。

- 例 5.4 では
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^n}=0$$
を示したが，これは 2^n の方が 3 乗より増大度が大きいことを意味する。

  実数 $a>1$ と自然数 k に対し
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$$
となることが知られているので，多項式より指数関数の方が増大度が大きい。

- 自然数 k_1, k_2 に対しては $k_1<k_2$ ならば
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{k_1}}{n^{k_2}}=0$$
なので，次数が高いほど増大度が大きい。

- b_n の増大度が a_n より大きいとき $a_n<b_n$ と書くことにすれば

  (多項式) $<$ (指数関数) $<$ (階乗)

  となっている。

- このことを用いて数列 $a_n = \dfrac{n^4}{2^n + n^2}$ の極限を求めよう。分母の増大度最大の項は 2^n なので 2^n で分子分母を割ると

  $$a_n = \frac{\dfrac{n^4}{2^n}}{1 + \dfrac{n^2}{2^n}}$$

  となる。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{2^n} = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$ より

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{0}{1+0} = 0$$

  となる。これはもちろん $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{2^n} = 0$ の成立を前提とした方法である。