数学序論追加説明#9

- 微分積分に関して復習しておく。

- 「定義に基づいて微分せよ」という問題の場合定義に基づいて計算しなければならない。例えば「$y = f(x) = x^2$ の導関数を定義に基づいて求めよ」という問題で

$$f'(x) = 2x$$

という解答は 0 点である。

定義は

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

なので解答は

$$\begin{aligned}(x^2)' &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x\end{aligned}$$

となる。

- 三角関数，指数関数，対数関数を定義に基づいて微分するときは次の極限が必要になる。

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad\qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

例えば対数関数 $y = f(x) = \log x$ の導関数を定義に基づいて求めてみよう。定義によると

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h}$$

であるが，基本の極限は指数関数なので，その形に変形する必要がある。$k = \log(x+h) - \log x$ とおく。

$$k = \log(x+h) - \log x = \log \frac{x+h}{x}$$

より $e^k = \dfrac{x+h}{x}$ となる。これより $h = x(e^k - 1)$ を得る。$h \to 0$ のとき $k \to 0$ である。逆に $k \to 0$ のとき $h \to 0$ であ

る。よって

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\lim_{k\to 0}\frac{k}{x(e^k-1)}$$
$$=\frac{1}{x}\lim_{k\to 0}\frac{k}{e^k-1}=\frac{1}{x}$$

- 「定義に基づいて」という指定がないときは諸公式を使用してよい。積の微分法と合成関数の微分法が重要である。例えば「$y=f(x)=x\sin(x^3+x)$ の導関数を求めよ」という問題を考える。積の微分を用いると

$$f'(x)=(x)'\sin(x^2+x)+x\left(\sin(x^2+x)\right)'$$

となる。$z=\sin(x^2+x)$ の微分は $u=x^2+x$ とおくと

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{du}\frac{du}{dx}=\cos u(2x+1)=(2x+1)\cos(x^2+x)$$

となる。よって

$$f'(x)=\sin(x^2+x)+x(2x+1)\cos(x^2+x)$$

- 関数 $y=(x-5)^4(x+1)^3$ のグラフを描こう。

$$\begin{aligned} y' &= 4(x-5)^3(x+1)^3+3(x-5)^4(x+1)^2 \\ &= (x-5)^3(x+1)^2\left\{4(x+1)+3(x-5)\right\} \\ &= (x-5)^3(x+1)^2(7x-11) \end{aligned}$$

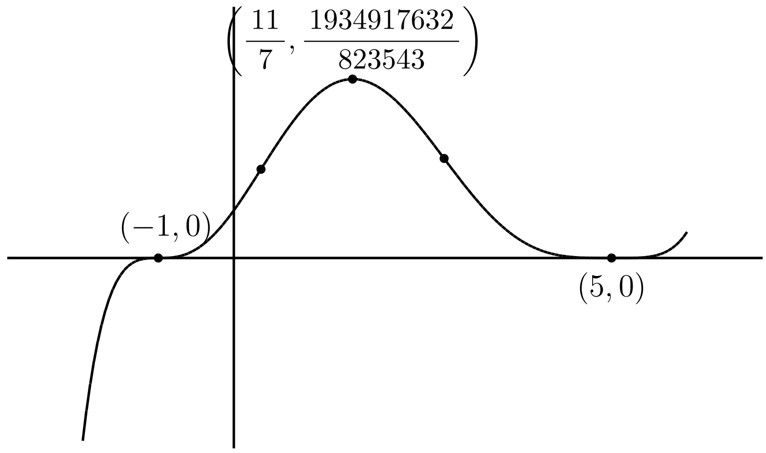
なので $y'=0$ を解いて $x=-1,\ 5,\ \dfrac{11}{7}$ を得る。

$$y'' = 6(x-5)^2(x+1)(7x^2-22x+7)$$

なので $y''=0$ を解いて $x=-1,\ 5,\ \dfrac{11+6\sqrt{2}}{7},\ \dfrac{11-6\sqrt{2}}{7}$ を得る。よって増減表は次の様になる。

x		-1		$\frac{11-6\sqrt{2}}{7}$		$\frac{11}{7}$		$\frac{11+6\sqrt{2}}{7}$		5	
y'	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$+$
y	↗		↗		↗		↘		↘		↗

x 軸との交点は $y=0$ を解いて $x=-1,5$ である。y 軸との交点は y に $x=0$ を代入して $(-5)^4=5^4$ である。以上を考慮してグラフの概形を描くと次のようになっている。



- 次のようにパラメータ表示された曲線の概形を書け。

$$x = x(t) = t^4 - t^2, \quad y = y(t) = t^3 - t$$

$x'(t) = 4t^3 - 2t$ なので $x'(t) = 0$ を解いて $t = 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ を得る。$y'(t) = 3t^2 - 1$ なので $y'(t) = 0$ を解いて $t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ を得る。$x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために，途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

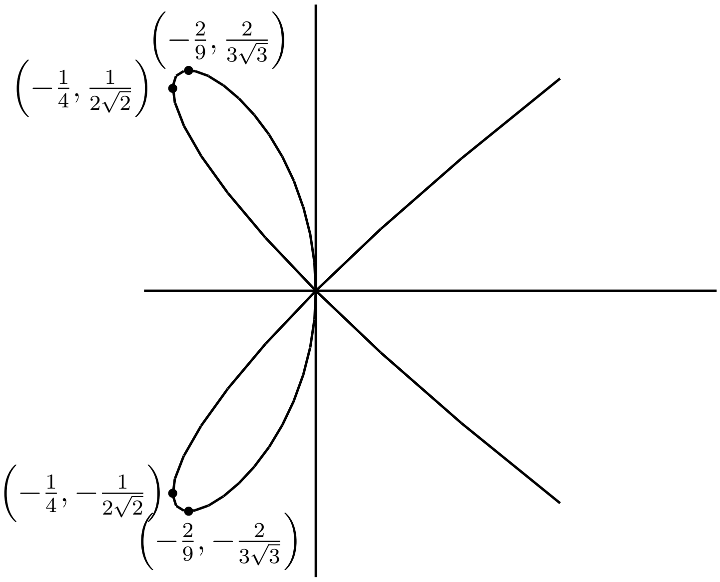
t		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
x'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$		$\rightarrow$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
曲線	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$

$x'(t) = 0$ および $y'(t) = 0$ となる点は
$\left(x\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$,
$\left(x\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(-\frac{2}{9}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$,
$(x(0), y(0)) = (0, 0)$，$\left(x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$,
$\left(x\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(-\frac{2}{9}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ である。

$x(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm 1$ を得る。$(x(0), y(0)) = (0, 0)$，$(x(1), y(1)) = (0, 0)$，$(x(-1), y(-1)) = (0, 0)$ なので y 軸との交点は $(0, 0)$ である。

$y(t)=0$ を解くと $t=0,\pm 1$ を得る。x 軸との交点は $(0,0)$ である。

以上を考慮して曲線の概形を描く。$t=-1$ のとき $(x(-1),y(-1))$ で原点を通り，$t=-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で方向を変え，$t=0$ で再度原点を通り，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で向きを変え，$t=1$ で原点を通るので次の様になる。



- 積分は置換積分と部分積分。例えば被積分関数が $x(3x^2+1)^8$ の場合，慣れれば置換積分でできることはすぐに分かるだろう。

  $t=3x^2+1$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=6x$ より $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\dfrac{dt}{dx}}=\dfrac{1}{6x}$ となる。よって

$$\begin{aligned}\int x(3x^2+1)^8\,dx &= \int xt^8\frac{1}{6x}\,dt=\frac{1}{6}\int t^8\,dt\\ &= \frac{1}{6}\frac{1}{9}t^9=\frac{1}{54}(3x^2+1)^9\end{aligned}$$

- $\arctan x$ の例は「退化」した場合なので部分積分を使うことに気がつかないかもしれない。

$f' = 1$, $g = \arctan x$ とおくと $f = x$, $g' = \dfrac{1}{1+x^2}$ なので

$$\begin{aligned}\int \arctan x\,dx &= fg - \int fg'\,dx \\ &= x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx\end{aligned}$$

となる。ここで $t = 1 + x^2$ とおくと

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+x^2}\,dx &= \int \frac{x}{t}\frac{1}{2x}\,dt = \int \frac{1}{2}\frac{1}{t}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\log|t| = \frac{1}{2}\log|1+x^2| = \frac{1}{2}\log(1+x^2)\end{aligned}$$

なので

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

となる。

重要な注意： 不定積分において計算は一般に大変であるが，**検算**は簡単である。求めた関数を微分して元の被積分関数になればよい。**必ず検算をする事**!!