数学序論要綱 #2

1.2　任意と存在

この節では，数学的命題を叙述するとき重要な役割を果たしている「任意」(すべて)[(1)] と「存在」について取上げる。

数学的命題はきちんと述べようとすると「任意」と「存在」という用語が必要になる。例えば

2 次関数 $y = f(x) = x^2 + ax + b$ には最小値が存在する

という命題を考えよう。最小値を与える x の値を p とする。最小値というのは「任意の x に対し $f(x) \geq f(p)$」が成立することである。上の命題は

$y = f(x) = x^2 + ax + b$ とする。このとき実数 p が存在して，任意の実数 x に対し $f(x) \geq f(p)$ が成立する。

という事を意味している。

「x は 3 以上である。」という言明のように不定元 (今の場合 x が不定元) を含んでいるものは真偽が定まらないので命題ではないが [(2)]，x に具体的なものが代入されて得られる言明は真偽が定まり，命題になる。このようなものを**命題関数** (*propositional function*) または**条件** (*condition*) といい，不定元が x である事を強調して $P(x)$ のように表す。

$P(x)$ が命題関数の時,「集合 [(3)] X の任意の元 x に対し $P(x)$ が成立する。」という言明は命題になる。これを通常は

任意の $x \in X$ に対し $P(x)$

[(1)]「任意」という用語は数学では「すべて」と同じ意味で使われる。「任意の x」といった場合，自分が勝手に選べる x ではないことに注意すること。

[(2)] 前に「$x = 1 \implies x^2 = 1$」が命題の様に書いたが，厳密にはこれは不正確であり，正確には「任意の実数 (状況により整数等の場合がある) に対し，$x = 1 \implies x^2 = 1$」と言わなくてはならなかった。ただし「任意の x について $\cdots$ が成立する」ということが前後の脈絡から明らかな場合は省略するという用法もある。そのように解釈すれば間違いとは言えない。高校の教科書などは基本的にそのような立場で記述されている。大学数学でもその様な記述をする場合もあるが，この章では省略せずに書く。

[(3)] 集合は「集合と写像」の章で詳しく学ぶ。ここでは高校までの知識を前提にしておく。

と書く。「元 x が集合 X に存在して，命題 $P(x)$ が成立する。」[(4)] という言明も命題になる。これを通常は

$$\text{(ある)}x \in X \text{ が存在して } P(x)$$

と書く。

たとえば $P(x)$ を「x は 3 以上である」という命題関数とし，集合 X を自然数全体がつくる集合とするとき

$$\text{任意の } x \in X \text{ に対し } P(x)$$

というのは今の場合正しくない命題である。

$$x \in X \text{ が存在して } P(x)$$

は今の場合正しい命題である。

議論を続ける前に「任意」と「存在」の記号を導入しよう。「任意」を表すのに「∀」,「存在」を表すのに「∃」という記号を使う。元々は any または all の頭文字の A をひっくり返して ∀ とし，exist の頭文字の E をひっくり返して ∃ を作ったと言われている。先ほどの例でいうと，

$$\forall x \in X \quad x \geq 3$$
$$\exists x \in X \quad x \geq 3$$

となる。他の命題と混在して誤解が生じる恐れのあるときは (例えば演習問題 1.4 の 6) 括弧でくくって

$$\exists x \in \mathbb{R}^{(5)} \quad \bigl(x - 2x^2 > 0 \ \wedge \ x < 0\bigr)$$

と書く。

∀ を**全称記号** (*universal quantifier*)，∃ を**存在記号** (*existential quantifier*)，両者を合わせて**限定記号** (*quantifier*) という。

限定記号を用いて前に述べたことをもう一度述べる。

---

(4)「命題 $P(x)$ が成立するような元 x が集合 X に存在する」の方が自然な日本語といえるかもしれないが，数学では通常直訳的なこのような表現が使われる。

(5) ここで $\mathbb{R}$ という記号が出てきたが，これは実数全体からなる集合を表す記号である。よくでてくるのでブラックボードフォントと呼ばれる特別のフォントが用いられる。

> $P(x)$ を命題関数とすると
> $\forall x \in X \quad P(x), \qquad \exists x \in X \quad P(x)$
> はそれぞれ命題になる。

限定記号が入った命題の真偽について表で考える。

x	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	$\cdots$	$\forall x \in X\, P(x)$
$P(x)$	T	T	T	$\cdots$	T	$\cdots$	T
$P(x)$	T	T	F	$\cdots$	T	$\cdots$	F

集合 X の元を $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ とするとき,「$\forall x \in X\, P(x)$」が真 (T) であるためにはすべての元 x_n に対して $P(x_n)$ が真 (T) であることが必要である。表でいうとすべての欄の真理値が**真** $[T]$ である必要がある。1 行目はそのようになっている (「$\cdots$」の部分はすべて真とする) ので「$\forall x \in X\, P(x)$」は真である。しかし 2 行目は $P(x_3)$ が偽 (F) なので「$\forall x \in X\, P(x)$」は真ではない。

x	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	$\cdots$	$\exists x \in X\, P(x)$
$P(x)$	F	F	T	$\cdots$	F	$\cdots$	T
$P(x)$	F	F	F	$\cdots$	F	$\cdots$	F

「$\exists x \in X\, P(x)$」が真 (T) であるためにはある元 x_n に対して $P(x_n)$ が真 (T) であれば十分である。表でいうと欄の真理値の中に 1 つでよいから**真** $[T]$ があればよい。1 行目は $P(x_3)$ が真なので，そのようになっている。しかし 2 行目は $P(x_n)$ が真になるような x_n は存在しない (「$\cdots$」の部分はすべて偽とする) ので「$\exists x \in X\, P(x)$」は真ではない。

限定記号がはいっていると，前節で考えた論理積・論理和も少し注意する必要が出てくる。全称記号の場合

$$\forall x \in X \quad (P(x) \;\wedge\; Q(x)) \iff (\forall x \in X \;\; P(x)) \wedge (\forall x \in X \;\; Q(x))$$

は成立するが

$$\forall x \in X \;\; (P(x) \;\vee\; Q(x)) \iff (\forall x \in X \;\; P(x)) \vee (\forall x \in X \;\; Q(x))$$

は成立しない。

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\forall x \in X\, X(x)$
$P(x)$	T	F	T	F	F	T	F
$Q(x)$	F	T	F	T	T	T	F
$P(x) \vee Q(x)$	T	T	T	T	T	T	T

$X = \{ x_1, x_2, \ldots, x_6 \}$ とし，$P(x), Q(x)$ の真偽が表の様だとする。$P(x)$ も $Q(x)$ も偽になる x_n が存在するので「$\forall x \in X\, P(x)$」および「$\forall x \in X\, Q(x)$」は偽である。しかし $P(x) \vee Q(x)$ はすべての x_n に対し真なので「$\forall x \in X\, P(x) \vee Q(x)$」は真である。

存在記号の場合

$$\exists x \in X \ \ (P(x) \ \vee \ Q(x)) \iff (\exists x \in X \ \ P(x)) \vee (\exists x \in X \ \ Q(x))$$

は成立するが

$$\exists x \in X \ \ (P(x) \ \wedge \ Q(x)) \iff (\exists x \in X \ \ P(x)) \wedge (\exists x \in X \ \ Q(x))$$

は成立しない。

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\exists x \in X\, X(x)$
$P(x)$	T	F	T	F	F	F	T
$Q(x)$	F	T	F	T	F	T	T
$P(x) \wedge Q(x)$	F	F	F	F	F	F	F

$P(x), Q(x)$ の真偽が表の様だとする。$P(x)$ も $Q(x)$ も真になる x_n が存在するので「$\exists x \in X\, P(x)$」および「$\exists x \in X\, Q(x)$」は真である。しかし $P(x) \wedge Q(x)$ はすべての x_n に対し偽なので「$\exists x \in X, (P(x) \wedge Q(x))$」は偽である。

「任意」「存在」を含んだ命題の否定命題を作るときは十分注意する必要がある。

「$\forall x \in X \ \ P(x)$」の否定は「$\forall x \in X \ \ \neg P(x)$」**ではない**。$P(x)$ が成立しない元が１つでもあればよいので「$\exists x \in X \ \ \neg P(x)$」である。同様に考えると「$\exists x \in X \ \ P(x)$」の否定は「$\forall x \in X \ \ \neg P(x)$」である。まとめて書くと

$$\neg \, (\, \forall x \in X \ \ P(x) \,) \iff \exists x \in X \ \ \neg P(x)$$
$$\neg \, (\, \exists x \in X \ \ P(x) \,) \iff \forall x \in X \ \ \neg P(x)$$

となる。

$\mathbb{R}$ を実数全体からなる集合とする。

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x)$$

という命題が正しくないことを示すためには，その否定命題

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \neg P(x)$$

が正しいことを示せばよい。

たとえば命題関数 $P(x)$ を「 x は3以上 」とする。0 は $0 \in \mathbb{R}$ であり，$\neg P(0)$ は正しい命題なので否定命題は正しい。よって元の命題が正しくないことが分かる。

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad P(x)$$

という命題が正しくないことを示すためには，その否定命題

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \neg P(x)$$

が正しいことを示せばよい。たとえば命題関数 $P(x)$ を「 $x^2 = -1$ 」とする。任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $x^2 \geq 0$ ということが知られているので，$x^2 \neq -1$ 即ち $\neg P(x)$ が成立する。否定命題は正しいので，元の命題が正しくないことが分かる。

演習問題 1.4　次の命題の否定命題をつくれ。また真偽を判定せよ。ここで $\mathbb{R}$ は実数全体からなる集合であり，$\mathbb{C}$ は複素数全体からなる集合とする。

(1) $\forall x \in \mathbb{R} \ \ x^2 \geq 0$　　(2) $\forall x \in \mathbb{C} \ \ x^2 \geq 0$

(3) $\forall x \in \mathbb{R} \ \ x^4 - x^2 + \dfrac{1}{4} \geq 0$　　(4) $\forall x \in \mathbb{R} \ \ x^4 - x^2 + \dfrac{1}{5} \geq 0$

(5) $\exists x \in \mathbb{R} \ \ x^4 - x^2 + \dfrac{1}{5} \leq 0$　　(6) $\exists x \in \mathbb{R} \ \ (x - 2x^2 > 0 \ \wedge \ x < 0)$

$P(x)$ が「$A(x) \implies B(x)$」という形をした命題の否定は，前節で扱った様に「$A(x) \wedge \neg B(x)$」だった。よって

$$\forall x \in X \ \ A(x) \implies B(x)$$

の否定は

$$\exists x \in X \ \ A(x) \wedge \neg B(x)$$

である。

演習問題 1.5　a, b は与えられた実数とする。次の命題の否定命題をつくれ。またこの命題の意味を考えることにより，a と b がどのような関係にあるとき真になるか考察せよ。

(1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad a < x \implies b < x$

(2) $\forall x \in \mathbb{R} \quad a > x \implies b > x$

(3) $\forall x \in \mathbb{R} \quad a \leq x \implies b < x$

不定元が 2 つ (またはそれ以上) あるような命題関数を考える事ができる。例えば「 $P(x, y)$: x は y より大きい 」とするとき，

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists y \in \mathbb{R} \quad P(x, y)$$

は命題である。それは「 $\exists y \in \mathbb{R} \ \ P(x,y)$ 」は不定元 x を含んでおり，命題関数 $Q(x)$ と考えることができるので「 $\forall x \in \mathbb{R} \ \ Q(x)$ 」が命題になるからである。同様に次の命題：

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R} \quad P(x,y)$$

$$\exists x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R} \quad P(x,y)$$

$$\exists x \in \mathbb{R} \ \exists y \in \mathbb{R} \quad P(x,y)$$

を考えることができる。

任意と存在は順序を入れ替えると異なる命題になることに注意すること。

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \ \exists y \in \mathbb{R} \quad P(x,y) \quad \not\equiv \quad \exists y \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R} \quad P(x,y)}$$

命題 (関数)$P(x,y)$ を : $x > y$ とすると左は真であるが，右は偽である (**理由を考えよ**：演習問題 1.6 参照)。

一方「 $\forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R} \ \ P(x,y)$ 」と「 $\forall y \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ P(x,y)$ 」は同値な命題であり，「 $\forall x, y \in \mathbb{R} \ \ P(x,y)$ 」と略記する場合も多い。

同様に「 $\exists x \in \mathbb{R} \ \exists y \in \mathbb{R} \ \ P(x,y)$ 」と「 $\exists y \in \mathbb{R} \ \exists x \in \mathbb{R} \ \ P(x,y)$ 」も同値であり,「 $\exists x, y \in \mathbb{R} \ \ P(x,y)$ 」と略記する場合も多い。

最初に述べた命題「$\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \ P(x,y)$」の否定命題をつくろう。$Q(x)$ を「 $\exists y \in \mathbb{R} \ \ P(x,y)$ 」とすると，もとの命題は

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad Q(x)$$

となる。この命題の否定は

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \neg Q(x)$$

である。$\neg Q(x)$ は

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \neg P(x,y)$$

なので否定命題は

$$\exists x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R} \quad \neg P(x,y)$$

となる。

つまり形式的には,

> 否定命題を作る時は存在を任意に，任意を存在に変え命題 (関数) を否定すればよい

と言う事になる。

演習問題 1.6　「 $P(x,y): x > y$ 」とするとき「 $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ P(x,y)$ 」と「 $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ P(x,y)$ 」の真偽を考察せよ。

演習問題 1.7　次の命題の否定命題をつくれ。またもとの命題の真偽を確かめよ。

(1) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \ x < y$	(2) $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ x < y$
(3) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ x < y$	(4) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \ x < y$
(5) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \ x^2 + y^2 \geq 0$	(6) $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ x^2 + y^2 = 0$

「任意」と「存在」に関して数学的内容のある演習問題を考えよう。そのために線型代数で学ぶ概念を先取りして定義する。$\boldsymbol{x}$ を空間または平面のベクトルとする。すなわち x, y, z を実数とするとき，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ または $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と表されているとする。平面のベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^2$，空間のベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^3$ と書く。

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を平面のベクトルとする。ベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が次の条件をみたすとき，$\mathbb{R}^2$ **を生成する**という；

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \quad \exists a_1, a_2 \in \mathbb{R} \qquad \boldsymbol{x} = a_1 \boldsymbol{x}_1 + a_2 \boldsymbol{x}_2$$

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{x}_3$ を空間のベクトルとする。ベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ が次の条件をみたすとき，$\mathbb{R}^3$ **を生成する**という；

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \quad \exists a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \qquad \boldsymbol{x} = a_1 \boldsymbol{x}_1 + a_2 \boldsymbol{x}_2 + a_3 \boldsymbol{x}_3$$

例を考える。$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする。ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = a_1 \boldsymbol{x}_1 + a_2 \boldsymbol{x}_2$$

と表されていると仮定する。このとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と表されるので

$$x = a_1 + a_2, \quad y = a_1 - a_2$$

となっている。これを a_1, a_2 について解くと

$$a_1 = \frac{x+y}{2}, \quad a_2 = \frac{x-y}{2}$$

となっている。逆に a_1, a_2 が x, y によって上の様に表されているとき，この上の式を逆にたどると

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2$$

が成立している。以上が解析の過程である。以下が証明である。

任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し

$$a_1 = \frac{x+y}{2}, \quad a_2 = \frac{x-y}{2}$$

とおくと

$$x = a_1 + a_2, \quad y = a_1 - a_2$$

が成立するので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_2 \end{pmatrix} \\ &= a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 \end{aligned}$$

と表される。よって $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は $\mathbb{R}^2$ を生成する。

次の例として $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2$$

と表されていると仮定する。このとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表されるので

$$x = a_1 - a_2, \quad y = -a_1 + a_2$$

となっている。このとき

$$x = a_1 - a_2 = -(-a_1 + a_2) = -y$$

となるので，$x = -y$ が成立する。よって

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2$$

となる a_1, a_2 が存在するとき $x = -y$ が成立している。$x = -y$ を満たさない x, y については a_1, a_2 が存在しないと思われる。以上が解析の過程である。

証明の前に「生成する」の否定命題がどのようになっているかを考える。

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \quad \exists a_1, a_2 \in \mathbb{R} \qquad \boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2$$

の否定は

$$\boxed{\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R} \qquad \boldsymbol{x} \neq a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2}$$

となる。以下が証明である。

ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とする。$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が $\mathbb{R}^2$ を生成すると仮定すると実数 a_1, a_2 が存在して

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が成立している。このとき

$$1 = a_1 - a_2, \quad 1 = -a_1 + a_2$$

が成立しているので

$$1 = a_1 - a_2 = -(-a_1 + a_2) = -1$$

が成立するがこれは矛盾である。よって背理法により $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は $\mathbb{R}^2$ を生成しない。

演習問題 1.8　次のベクトルの組が $\mathbb{R}^2$ または $\mathbb{R}^3$ を生成するかどうか調べよ。

(1) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

(3) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(4) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$