数学序論要綱 #6

2.4 写像

A, B を集合とする。A の各要素 a に対し B の要素 b を対応させる規則 f を，集合 A から集合 B への**写像** (*mapping,map*) といい，

$$f : A \longrightarrow B, \qquad \text{または} \qquad A \xrightarrow{f} B$$

のように表す。

元 $a \in A$ に対応する元 $b \in B$ を写像 f による a の**像** (*imarge*) といい，$b = f(a)$ と表す。逆に，a を f による b の**原像** (*preimarge*) という。元 a に対し像は一通りに定まる (このようなとき**一意的**という) が，元 b に対し原像は存在するとは限らないし，存在しても一意的とは限らない。数の集合から数の集合への写像を**関数** (*function*)[1] ともいう。

元 x に対し $f(x)$ が対応しているとき $x \longmapsto f(x)$ と書く。これをひとまとめにして書くことも多い。例えば 2 次関数 $y = f(x) = x^2$ を実数全体の集合 $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像と考える。f は実数 $x \in \mathbb{R}$ に対し x^2 を対応させるので

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

と表す。

定義 2.6

(1) 写像 $f : A \longrightarrow B$ とする。このとき A を**定義域** (*domain*) といい，B を**終域** (*codomain*) という。

$$\boxed{f(A) = \{\, f(a) \mid a \in A \,\} = \{\, b \in B \mid \exists a \in A \;\; b = f(a) \,\}}$$

を**値域** (*range*) あるいは**像** (*image*) という。

(2) 集合 A から A 自身への写像で，任意の要素 $a \in A$ を a に写す写像を**恒等写像** (*identity map*) といい，id_A または 1_A という記号で表す (すなわち「$\forall a \in A \; id_A(a) = a$ 」である)。

(3) 写像 $f : A \longrightarrow B$ に対し $f(A) = B$ が成立するとき，f を **全射** (*surjection*) ，または**上への写像** (*onto map*) という。論理記

---

[1] 元々は函数と書いていたが，当用漢字から「函」の字が外れたために，この漢字を使用するようになった。原義を尊重して函数を用いる人もいる。

号を用いて表すと

$$\forall b \in B\ \exists a \in A \quad b = f(a)$$

である。

(4) 写像 $f : A \longrightarrow B$ において 任意の $a_1, a_2 \in A$ に対して，$a_1 \neq a_2$ なら常に $f(a_1) \neq f(a_2)$ となる時，f を**単射** (*injection*)，または **1 対 1 の写像** (*one-to-one map*) という。論理記号を用いて表すと

$$\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$$

である。この条件は対偶をとると

$$\forall a_1, a_2 \in A \quad f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$$

となる。写像が一対一であることを示すときにこの形の方が示しやすい場合もある。

(5) 写像 $f : A \longrightarrow B$ が全射かつ単射である時，**全単射** (*bijection*) という。

(6) 2つの写像 $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ に対し，$h(a) = g(f(a))$ で定められる写像 $h : A \longrightarrow C$ を定義できる。これを f と g の**合成写像** (*composite mapping*) といい，$h = g \circ f$ という記号で表す。

(7) 2つの写像 $f : A \longrightarrow B$ と $g : C \longrightarrow D$ が次を満たすとき 2 つの写像は等しいといい，$f = g$ と書く；$A = C$，$B = D$ かつ

$$\forall a \in A \quad f(a) = g(a)$$

が成立する。即ち定義域と終域が等しく，元を対応させるルールも等しいときである。

演習問題 2.9 $A = \{1, 2\}$ とする。定義域および終域がともに A である写像をすべて列挙せよ。その中で単射であるものをすべて挙げよ。また全射であるものをすべて挙げよ。

演習問題 2.10 $A = \{1, 2, 3\}$ とする。定義域および終域がともに A である写像で単射であるものををすべて列挙せよ。また全射であるものをすべて列挙せよ。

有限集合 (有限個の元からなる集合) で A の元の個数と B の元の個数が等しいとき，写像 $f : A \longrightarrow B$ が全射であれば単射であり，逆に単射であれば全射である。無限集合 (無限個の元からなる集合) の場合は成立しない。

演習問題 2.11　$\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への写像で全射であるが，単射でない例をあげよ。また $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への写像で単射であるが，全射でない例をあげよ。

$f : X \longrightarrow Y$ が関数のとき y が x の式で与えられる場合がよくある。例えば $y = f(x) = x^2$ で x から y への対応が与えられているとする。この $y = f(x) = x^2$ は像であって関数 (写像) ではないが，**古典的使用法 (歴史的使用法)** により，関数 $y = f(x) = x^2$ という表現をすることがある。解析学においてはむしろこの表現の方が多いかもしれない。

古典的使用法では，定義域が明示的に述べられていないことも多い。定義域が明示的に述べられていないとき，考えられる最大の集合をとることが普通である。例えば定義域の指定なしに関数 $y = \dfrac{1}{x}$ と言った場合，数学序論，解析学 I，II では通常実数値関数の範囲で考えるので，$X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ と考える。この講義では混乱のおそれのない場合は古典的使用法も採用する。

定義 2.7 写像 $f : A \longrightarrow B$ に対し

$$G_f = \{ (a, b) \in A \times B \mid b = f(a) \}$$

を写像 f の**グラフ** (graph) という。一般の写像に対してグラフを定義することができるが，この概念が特に役に立つのは A, B が実数の部分集合の場合である。$A = B = \mathbb{R}$ の場合が高校までで扱ったいわゆる「関数のグラフ」である。

定義 2.8 高校で学んでいると思うが，閉区間，開区間等について記号も含め述べておく。以下 a, b は $a < b$ となる実数とする。

実数の部分集合で $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ の形をしているものを**閉区間**と呼び，$[\,a,\,b\,]$ と書く。実数の部分集合で $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ の形をしているものを**開区間**と呼び，$(\,a,\,b\,)$ と書く。

実数の部分集合で $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ または $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ の形をしているものを**半開区間**と呼び，$[\,a,\,b\,)$ または $(\,a,\,b\,]$ と書く。まとめて書くと

$$\boxed{\begin{aligned} [\,a,\,b\,] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \\ (\,a,\,b\,) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\ [\,a,\,b\,) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\ (\,a,\,b\,] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \end{aligned}}$$

となる。

∞ は実数ではないが，記号を拡張して $[\,a,\,\infty\,)$ 等の記号も使用する。形式的に考えると

$$[\,a,\,\infty\,) = \{\,x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < \infty\,\}$$

なので，$\{\,x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\,\}$ と解釈する。ただし $[\,a,\,\infty\,]$ の様に ∞ の部分が等号になるような記号は用いない。

例 2.9

(1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ と定義する。この場合，定義域は $\mathbb{R}$ であり，終域も $\mathbb{R}$ である。$f(1) = f(-1) = 1$ が成立する。すなわち，異なる 2 つの点の行き先で同じになるものがあるので f は単射ではない。

値域 $f(\mathbb{R})$ は 0 以上の実数全体の集合

$$f(\mathbb{R}) = \{\,y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\,\} = [\,0,\,\infty\,)$$

である (→ 演習問題 2.12)。よって f は全射ではない。

(2) $f : \mathbb{R} \longrightarrow [\,0,\,\infty\,)$ を $f(x) = x^2$ で定義すると，この f は (1) の f と終域を除いて同じ値をとる写像であり，(1) と同様に単射でない。しかし (1) の f は全射ではないが，(2) の f は全射である。

(3) $f(x) = x^2$ という同じ 2 次関数を考える。しかし今度は，定義域を制限して，f を $f : [\,0,\,\infty\,) \longrightarrow \mathbb{R}$ という写像と考える。値域 $f([\,0,\,\infty\,))$ はやはり $[\,0,\,\infty\,)$ となる。

この場合，f は $[\,0,\,\infty\,)$ 上では単調増加なので単射である (→ 演習問題 2.14)。しかし全射ではない (→ 演習問題 2.12)。

(4) しつこく $f(x) = x^2$ という同じ 2 次関数を考える。しかし今度は，定義域と終域を共に制限して，f を $f : [\,0,\,\infty\,) \longrightarrow [\,0,\,\infty\,)$ という写像と考える。

(3) で述べた理由から f は単射であり，さらに，値域 $f([\,0,\,\infty\,))$ は $[\,0,\,\infty\,)$ であるので全射となり，全単射となる。

(5) 更にしつこく $f(x) = x^2$ という同じ 2 次関数を考える。今度は，定義域と終域を共に $A = \{\,x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\,\}$ として，f を $f : A \longrightarrow A$ という写像と考える。このとき f は単射だが，全射ではない (→ 演習問題 2.12)。

演習問題 2.12

(1) 例 2.9 (1) において $f(\mathbb{R}) = \{\,y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\,\}$ が成立することを示せ。ただし，関数 $f(x) = \sqrt{x}$ が存在することは既知としてよい。

(2) 例 2.9 (3) において $f([\,0,\infty\,)) = [\,0,\infty\,)$ が成立することを示せ。ただし，関数 $f(x) = \sqrt{x}$ が存在することは既知としてよい。

(3) 例 2.9 (5) の f が全射でないことを示せ。$\sqrt{2}$ が有理数でないことは既知としてよい。

演習問題 ***2.13**　演習問題 2.12 において関数 $y = \sqrt{x}$ の存在を仮定したが，厳密に考えると，これは正しくない。$y = \sqrt{x}$ は例 2.9 (4) の関数 $y = x^2$ の逆関数として定義されるもので，後で見るように逆関数が定義されるためには全単射であることが必要である。$f(x)$ の全単射が証明されてからでないと存在が保障されない $y = \sqrt{x}$ を使って $f(x)$ の全単射を証明することは循環論法になる。

そこで，$y = \sqrt{x}$ を使用しないで，例 2.9 (1) に関して $f(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$ が成立することを示せ。ただし，**中間値の定理** ($[a,b]$ で定義された連続関数は $f(a)$ と $f(b)$ の間の値 α に対し $\alpha = f(c)$ となる c $(a < c < b)$ が存在する) は既知としてよい。

演習問題 2.14　$f : A \longrightarrow B$ が単調増加 $(\forall x_1, x_2 \in A \ \ x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2))$ のとき単射であることを示せ。

命題 2.10 $f : A \longrightarrow B$ が全単射であれば，B の任意の要素 b に対して，$f(a) = b$ となる A の要素 a がただ一つ存在する。

証明　$f : A \longrightarrow B$ は全射なので，B の任意の元 b に対して，ある $a \in A$ が存在して，$b = f(a)$ となっている。

f は単射なので，$f(a_1) = f(a_2) = b$ であるとすると $a_1 = a_2$ でなければばならない。すなわち，$f(a) = b$ となるような a はただ一つである。 ∎

$f : A \longrightarrow B$ が全単射である時，$b \in B$ に対して，$b = f(a)$ を満たす $a \in A$ を対応させる写像が定義できる。これを f の**逆写像** (*inverse map*) といい，$f^{-1} : B \longrightarrow A$ という記号で表す。すなわち，$f(a) = b$ の時，$f^{-1}(b) = a$ である。従って特に，

$$f^{-1} \circ f = id_A \qquad f \circ f^{-1} = id_B$$

が成り立つ。

例 2.11

(1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow (\,0,\infty\,)$ を $f(x) = 2^x$ とすると f は全単射である (4 章で扱う)。従って，f の逆写像 $f^{-1} : (\,0,\infty\,) \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在する。これが $f^{-1}(x) = \log_2 x$ である。

(2) $f : [\,0,\,\infty\,) \longrightarrow [\,0,\,\infty\,)$ を $f(x) = x^2$ とすると全単射となる。従って，この逆写像 $f^{-1} : [\,0,\,\infty\,) \longrightarrow [\,0,\,\infty\,)$ が存在する。これが $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ である。

(3) $f : \left[\,-\dfrac{\pi}{2},\,\dfrac{\pi}{2}\,\right] \longrightarrow [\,-1,\,1\,]$ を $f(x) = \sin x$ とすると全単射である (4 章で扱う)。従って，逆写像 $f^{-1} : [\,-1,\,1\,] \longrightarrow \left[\,-\dfrac{\pi}{2},\,\dfrac{\pi}{2}\,\right]$ が存在する。この関数を $f^{-1}(x) = \arcsin x$ と書き，アークサイン x と読む。$\sin^{-1} x$ と書かれることが多いが，間違えやすい記号なので，この講義では採用しない。この関数は 4 章で扱うが，重要な関数である。

演習問題 2.15　$f : A \longrightarrow B,\ g : B \longrightarrow C$ とする。

(1) f と g が単射ならば，$g \circ f : A \to C$ も単射であることを証明せよ。

(2) f と g が全射ならば，$g \circ f : A \to C$ も全射であることを証明せよ。

ヒント：単射と全射の定義が満たされることを示せば良い。

演習問題 2.16　X, Y を集合とし，$f : X \longrightarrow Y$ とする。A, B を X の部分集合とする。ここで $f(A) = \{\, f(a) \mid a \in A \,\} = \{\, b \in Y \mid \exists a \in A\ b = f(a) \,\}$ と定義する。

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ を証明せよ。

(2) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ を証明せよ。

(3) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ とはならない例を挙げよ。

ヒント： (1), (2) については，問題 2.6 のヒントを参照。(3) については，例えば $A \cap B = \emptyset$ かつ $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$ となる例を作れば良い。