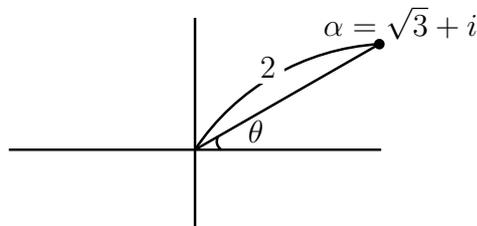


3.3 複素数の極形式とオイラーの公式

ここでは、複素数に対する極形式、オイラーの公式を与え、複素数の積の幾何学的意味を考える。

まず例から始めよう。ℂ と複素平面の同一視の下で、複素数 $\alpha = \sqrt{3} + i$ の表す平面内の点 α を考える。 α と実軸の正の向きとがなす角を θ とし(今の場合 $\theta = \frac{\pi}{6}$)、 $\sqrt{3} + i$ を α の絶対値と θ で表してみると次の図の様になる：



$$|\alpha| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2, \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

であるから、

$$\sqrt{3} + i = 2 \cos \frac{\pi}{6} + 2i \sin \frac{\pi}{6} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

と表すことができる。この表示を極形式という。

一般の場合を考えよう。複素数 $\alpha = a + bi$ に対して、ベクトル α と実軸の正の向きとが作る角を θ とおく。このとき、 θ の範囲は、

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

の範囲で唯一つ定まる ($0 \leq \theta < 2\pi$ という制限をつけなければ θ の選び方には $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) だけの不定性があることに注意する)。ベクトル α の長さを r とすると

$$\cos \theta = \frac{a}{r}, \quad \sin \theta = \frac{b}{r} \iff a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta$$

が成り立っている。従って、

$$\alpha = a + bi = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

を得る。この複素数の長さ(絶対値)及び角度 θ を用いた表示を $\alpha =$

$a + bi$ の極形式という。 θ を $\alpha = a + bi$ の偏角と呼び、 α の偏角を $\arg \alpha$ と書く。ただし、 α から $\arg \alpha$ が一意的に決まるものでないことは注意しておく。

演習問題 3.5 次の複素数の極形式を求めよ。また複素平面に対応する点を図示せよ。

- (1) $1 + i\sqrt{3}$ (2) -2 (3) i (4) $2\sqrt{3} - 2i$ (5) $1 - \sqrt{3}i$

虚数 $i\theta$ を変数とする指数関数 $e^{i\theta}$ を、天下りの的に次の式で定める：

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

これをオイラーの公式⁽¹⁾と呼ぶ。この公式が何故成立するかに関しては解析学 I で学ぶが、ここでは天下りに成立するものとして議論を進める。

e^X において X が複雑な式になる場合もある。そのときは

$$\exp X = e^X$$

という表示をすることもある。例えば正規分布は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

などと書かれる。

オイラーの公式において、 θ を $-\theta$ に置き換え、 $\cos(-\theta) = \cos \theta$, $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ を用いると

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

が得られることに注意する。

演習問題 3.6 次の問に答えよ。

- (1) $e^{i\theta}$ は、原点を中心とする半径 1 の円上の点であることを示せ。
 (2) オイラーの公式を用いて次の等式を導け。

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

指数関数 $e^{i\theta}$ に対しても実数の指数関数 e^x と同様に指数法則が成り立つのか気になるが、次の定理が成り立つ：

⁽¹⁾ オイラーの公式と呼ばれるものは沢山あって、一般の場合「オイラーの公式」といってもどれを指すか不明確だが、数学序論および解析学 I, II ではこの公式を指すものと約束する。

定理 3.4 虚数 $i\theta$ を変数とする指数関数 $e^{i\theta}$ に対して指数法則が成り立つ：

$$e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

証明 オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ と三角関数の加法定理より，

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} &= (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ &= e^{i(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned}$$

となり指数法則が成立している。■

注意 3.5 [指数法則 = 加法定理] この定理の逆，すなわち，指数関数 $e^{i\theta}$ の指数法則を仮定することにより，三角関数の加法定理が証明できる。実際，オイラーの公式より

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} &= (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2) \end{aligned}$$

であり一方，

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

なので，指数関数 $e^{i\theta}$ の指数法則 ($e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$) より三角関数の加法定理を得る。

定理 3.4 から次の系が得られる。

系 3.6 [ド・モアブルの公式] 自然数 n に対して，

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

が成り立つ。

証明 定理 3.4 において， $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ とおけば， $(e^{i\theta})^2 = e^{i(\theta+\theta)} = e^{i2\theta}$ が成り立つ。さらに定理 3.4 を適用すれば，

$$(e^{i\theta})^3 = (e^{i\theta})^2 \cdot e^{i\theta} = e^{i2\theta} e^{i\theta} = e^{i3\theta}$$

を得る。以下，同様にして任意の自然数 n に対して， $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ が成り立つことが分かる (きちんと示すには数学的帰納法を用いる。演習問題 3.7 参照)。■

演習問題 3.7 次の問に答えよ。

(1) $(e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}$ を示せ。

(2) 系 3.6 を数学的帰納法を用いて証明せよ。

定理 3.4 から次の系が得られる。

系 3.7 複素数 α, β に関し次が成立する。

$$(1) |\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$$

$$(2) \arg(\alpha\beta) = \arg \alpha + \arg \beta$$

証明 $\alpha = r_1 e^{i\theta_1}, \beta = r_2 e^{i\theta_2}$ と表されているとする。このとき

$$\alpha\beta = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

となる。 $|\alpha\beta| = r_1 r_2 = |\alpha| \cdot |\beta|$ であり, $\arg(\alpha\beta) = \theta_1 + \theta_2 = \arg \alpha + \arg \beta$ となる。■

(1) はすでに演習問題 3.3 で扱っている。偏角に関しては注意が必要である。偏角は一意的に決まらない。 α の偏角と β の偏角を定めたとき, $\alpha\beta$ の偏角で $\arg \alpha + \arg \beta$ になるものが存在するということである。 $\alpha, \beta, \alpha\beta$ の偏角をたとえば 0 と 2π の間にとったときは一般に成立しない。

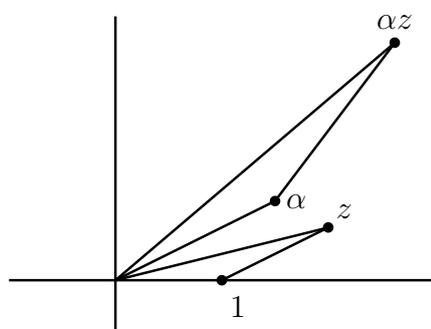


図 3.3

複素数の極形式の話に戻ろう。複素数 $\alpha = a + ib$ の絶対値を r , 偏角を θ とする。オイラーの公式を用いると極形式は, 次の様書き直せる:

$$\alpha = a + ib = r e^{i\theta}$$

これもまた複素数 α の極形式と呼ぶ。ここで,

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |\alpha| \quad \cos \theta = \frac{a}{r} \quad \sin \theta = \frac{b}{r}$$

であった。この極形式を用いて, 複素数の積の幾何学的意味を理解しよう。

$$\alpha = r_0 e^{i\lambda}, \quad z = r e^{i\theta}$$

とおく。

複素数をベクトルと見なすと, ベクトル α は長さが r_0 で実軸の正の向きとの成す角が λ のベクトル, z は長さが r で実軸の正の向

きとの成す角が θ であるベクトルである。このとき、複素数としての積は、

$$\alpha z = r_0 e^{i\lambda} r e^{i\theta} = r_0 r e^{i(\lambda+\theta)}$$

であるから、ベクトル z は、複素数 α を掛けることにより、長さが r_0 倍、実軸の正の向きから λ だけ回転されたベクトル αz に変換された。これが複素数の積の幾何学的意味である。とくに、 $r_0 = 1$ のとき、 αz は z を λ だけ反時計回りに回転させたベクトルである。

特に $|\alpha| = r_0 = 1$ のとき αz は z を原点の回りに λ だけ回転させたベクトルになっている。 $i = e^{i\pi/2}$ なので i をかけることは原点の回りに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させることになる。

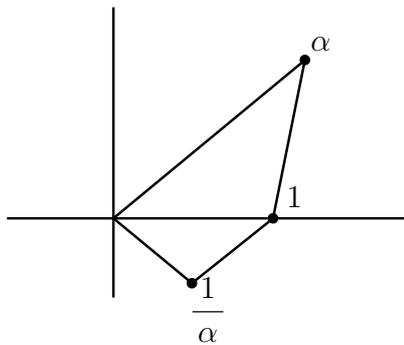


図 3.4

となっている。 α で割ることは $\frac{1}{\alpha}$ をかけることなので、 z を α の偏角だけ時計回りに回転させ、 α の絶対値で割ったものが商になる。

代数的には、

$$\frac{z}{\alpha} = \frac{r e^{i\theta}}{r_0 e^{i\lambda}} = \frac{r}{r_0} e^{i(\theta-\lambda)}$$

となっている。

注意 3.8 z や α の偏角が 0 から 2π の範囲に入っているも、 αz や $\frac{z}{\alpha}$ の偏角が 0 から 2π の範囲に入っているとは限らない。

演習問題 3.8 次の点を極形式で表し図示せよ。なお (3), (4) は点 α, β を用いて作図により与えよ。

- | | |
|-----------------------|--|
| (1) $\alpha = 2 + 2i$ | (2) $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ |
| (3) $\alpha\beta$ | (4) $\frac{\beta}{\alpha}$ |

1 の n 乗根 任意の正の整数 n に対して,

$$z^n = 1$$

が成り立つとき, z を 1 の n 乗根と呼ぶ。 $|z|^n = 1$ 且つ $|z| \geq 0$ より, $|z| = 1$ 。すなわち, 複素数 z は原点を中心とした半径 1 の円上の点である。そこで, $z = e^{i\theta}$ とおけば, ド・モアブルの公式より,

$$e^{in\theta} = 1.$$

従って,

$$n\theta = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

を得る。これより, 方程式 $z^n = 1$ の解は,

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right) &= \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \\ \exp\left(\frac{4\pi i}{n}\right) &= \cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n} \\ &\dots \\ \exp\left(\frac{2(n-1)\pi i}{n}\right) &= \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} \\ \exp\left(\frac{2\pi ni}{n}\right) &= 1 \end{aligned}$$

の n 個である。

演習問題 3.9

- (1) 1 の 4 乗根を具体的に求め, 複素平面に図示せよ。
- (2) 1 の 3 乗根を具体的に求め, 複素平面に図示せよ。
- (3) 1 の 6 乗根を具体的に求め, 複素平面に図示せよ。
- (4) 1 の 5 乗根を求め, 複素平面に図示せよ。

演習問題 3.10 $z = e^{2i}$ とするとき, 次の問いに答えよ。

- (1) z, z^2, z^3, z^4 を複素平面に図示せよ。
- (2) 異なる自然数 m, n に対し $z^m \neq z^n$ を示せ。ただし π が有理数でないことは既知としてよい。