

演習問題 1.4 次の命題の否定命題をつくれ。また真偽を判定せよ。ここで  $\mathbb{R}$  は実数全体からなる集合であり、 $\mathbb{C}$  は複素数全体からなる集合とする。

- (1)  $\forall x \in \mathbb{R} \ x^2 \geq 0$  (2)  $\forall x \in \mathbb{C} \ x^2 \geq 0$   
 (3)  $\forall x \in \mathbb{R} \ x^4 - x^2 + \frac{1}{4} \geq 0$  (4)  $\forall x \in \mathbb{R} \ x^4 - x^2 + \frac{1}{5} \geq 0$   
 (5)  $\exists x \in \mathbb{R} \ x^4 - x^2 + \frac{1}{5} \leq 0$  (6)  $\exists x \in \mathbb{R} \ (x - 2x^2 > 0 \wedge x < 0)$

(1) 否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{R} \ x^2 < 0$ 」である。

正  $\times$  正 = 正, 負  $\times$  負 = 正,  $0 \times 0 = 0$  なので任意の実数  $x$  に対し  $x^2 \geq 0$  が成立する。よって 1.4 (1) は正しい命題であり, 否定命題は正しくない命題である。

(2) 否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{C} \ x^2 < 0$ 」である。複素数  $i$  は  $i^2 = -1 < 0$  なので否定命題は正しい命題である。よって 1.4 (2) は偽である。なお複素数は一般に大小の比較はできないことを注意しておく。元の命題を「 $\forall x \in \mathbb{C} \ x^2$ は0と大小が比較可能で  $x^2 \geq 0$ 」と考えたと否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{C} \ x^2$ は0と大小が比較可能でないかまたは  $x^2 < 0$ 」となる。

(3) 否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{R} \ x^4 - x^2 + \frac{1}{4} < 0$ 」である。 $x^4 - x^2 + \frac{1}{4} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$  なので 1.4 (3) は正しい命題であり, 否定命題は正しくない命題である。

(4) 否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{R} \ x^4 - x^2 + \frac{1}{5} < 0$ 」である。 $x^4 - x^2 + \frac{1}{5} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{20}$  が成立する。 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  とすると、 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{5} = -\frac{1}{20} < 0$  となるので否定命題は正しい命題である。よって 1.4 (4) は偽である。

(5) 否定命題は「 $\forall x \in \mathbb{R} \ x^4 - x^2 + \frac{1}{5} > 0$ 」である。(4) の(反)例は(5)の例にもなっているので, 1.4 (5) は正しい。

(6) 否定命題は「 $\forall x \in \mathbb{R} \ (x - 2x^2 \leq 0 \vee x \geq 0)$ 」である。 $x - 2x^2 = x(1 - 2x) > 0 \iff 0 < x < \frac{1}{2}$  なので  $x - 2x^2 > 0$  かつ  $x < 0$  となる実数  $x$  は存在しない。よって 1.4 (6) は偽である。

演習問題 1.5  $a, b$  は与えられた実数とする。次の命題の否定命題をつくれ。またこの命題の意味を考えることにより,  $a$  と  $b$  がどのような関係にあるとき真になるか考察せよ。

- (1)  $\forall x \in \mathbb{R} \ a < x \implies b < x$   
 (2)  $\forall x \in \mathbb{R} \ a > x \implies b > x$   
 (3)  $\forall x \in \mathbb{R} \ a \leq x \implies b < x$

(1) 命題「 $\forall x \in \mathbb{R} \ a < x \implies b < x$ 」を  $P$  とする。否定命題  $\neg P$  は

$$\exists x \in \mathbb{R} \ a < x \wedge x \leq b$$

である。

否定命題  $\neg P$  が正しいとき  $a < b$  が成立する。「 $a < b$ 」という命題を  $P_1$  とおくと

$$\neg P \implies P_1$$

が成立している。

このときこの逆，即ち

$$P_1 \implies \neg P$$

が成立する。なぜなら， $P_1$  が真のとき  $x = \frac{a+b}{2}$  とおくと  $x$  は  $a < x \leq b$  を満たす。よって  $\neg P$  が成立し， $P_1 \implies \neg P$  は真である。

よって  $\neg P$  と  $P_1$  は同値であることが分かる。即ち

$$P_1 \equiv \neg P$$

が成立する。同値な命題の否定命題は同値なので

$$\neg P_1 \equiv P$$

が成立する。以上によりもとの命題  $P$  は「 $a < b$ 」の否定，即ち「 $a \geq b$ 」と同値であることが分かる。

(1) は  $a \geq b$  のとき真， $a < b$  のとき偽であることが示された。

(2) 命題「 $\forall x \in \mathbb{R} a > x \implies b > x$ 」を  $P$  とする。否定命題  $\neg P$  は

$$\exists x \in \mathbb{R} a > x \wedge x \geq b$$

である。

「 $a > b$ 」という命題を  $P_1$  とおくと

$$\neg P \implies P_1$$

が成立している。

このときこの逆，即ち

$$P_1 \implies \neg P$$

が成立する。なぜなら  $P_1$  が正しいとき  $x = \frac{a+b}{2}$  とおくと  $x$  は  $a > x \geq b$  をみたす。よって  $\neg P$  が成立し， $P_1 \implies \neg P$  は真である。

同値な命題の否定命題は同値なので

$$\neg P_1 \equiv P$$

が成立する。以上によりもとの命題  $P$  は「 $a > b$ 」の否定，即ち「 $b \geq a$ 」と同値であることが分かる。

(2) は  $b \geq a$  のとき真， $a > b$  のとき偽であることが示された。

(3) 命題「 $\forall x \in \mathbb{R} a \leq x \implies b < x$ 」を  $P$  とする。否定命題  $\neg P$  は

$$\exists x \in \mathbb{R} a \leq x \wedge x \leq b$$

である。

「 $a \leq b$ 」という命題を  $P_1$  とおくと

$$\neg P \implies P_1$$

が成立している。

このときこの逆，即ち

$$P_1 \implies \neg P$$

が成立する。なぜなら  $P_1$  が正しいとき  $x = \frac{a+b}{2}$  とおくと  $x$  は  $a \leq x \leq b$  をみたす。よって  $\neg P$  が成立し， $P_1 \implies \neg P$  は真である。

よって  $\neg P$  と  $P_1$  は同値であることが分かる。即ち

$$P_1 \equiv \neg P$$

が成立する。同値な命題の否定命題は同値なので

$$\neg P_1 \equiv P$$

が成立する。以上によりもとの命題  $P$  は「 $a \leq b$ 」の否定，即ち「 $a > b$ 」と同値であることが分かる。

(3) は  $a > b$  のとき真， $a \leq b$  のとき偽であることが示された。

**演習問題 1.6** 「 $P(x, y) : x > y$ 」とするとき「 $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} P(x, y)$ 」と「 $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} P(x, y)$ 」の真偽を考察せよ。

「任意」と「存在」の入った命題を考えるときは，相手と2人ゲームをやっていると考えるのも1つの方法である。「任意」は相手が指定してくるもの，「存在」は自分が指定するものと考えて  $P(x, y)$  が成立したら自分の勝ちと考えるわけである。前者の「 $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} P(x, y)$ 」は相手が先手で何か  $x$  を指定してくるのに対し  $x > y$  が成立するように  $y$  を選べるかという問題である。後者は最初に自分でうまく  $y$  を選んで相手が  $x$  をどのようにえらんでも  $x > y$  を成立させることができるかという問題である。

前者は任意の  $x$  に対し  $y = x - 1$  を選ぶことができる。前者は正しい命題である。後者は自分が  $y$  をどのように選んでも，相手が  $x = y - 1$  を選ぶと  $x > y$  を成立させることができない。よって後者は間違った命題である。

後者を示すのに否定命題「 $\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} x \leq y$ 」を考えそれが真であることを示してもよい。

**演習問題 1.7** 次の命題の否定命題をつくれ。またもとの命題の真偽を確かめよ。

(1)  $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} x < y$

(2)  $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} x < y$

(3)  $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} x < y$

(4)  $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} x < y$

(5)  $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} x^2 + y^2 \geq 0$

(6)  $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} x^2 + y^2 = 0$

命題の真偽を調べるときは，元の命題の真偽を調べてもよいし，否定命題の真偽を調べてもよい。どちらか一方の真偽を調べれば十分である。

(1) 否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} x \geq y$ 」である。 $x = 1, y = 0$  を選べば否定命題は成立する。よって元の命題は正しくない。

(2) 否定命題は「 $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} x \geq y$ 」である。 $x = 0, y = 1$  を選べば元の命題が正しいことが分かる。

(3) 否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} x \geq y$ 」である。任意の実数  $x$  に対し  $y = x + 1$  とおく。このとき  $x < y$  が成立するので元の命題は正しい命題であることが分かる。

(4) 否定命題は「 $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} x \geq y$ 」である。任意の実数  $x$  に対し  $y = x$  を選ぶと否定命題の成立が分かる。よって元の命題は正しくない。

(5) 否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} x^2 + y^2 < 0$ 」である。任意の実数  $x$  に対し  $x^2 \geq 0$  が成立する。同様に任意の実数  $y$  に対し  $y^2 \geq 0$  が成立する。よって  $x^2 + y^2 \geq 0$  が成立するので元の命題は正しい。

(6) 否定命題は「 $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} x^2 + y^2 \neq 0$ 」である。 $x = 0, y = 0$  を選ぶと  $x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 = 0$  で元の命題が正しいことが分かる。

演習問題 1.8 次のベクトルの組が  $\mathbb{R}^2$  または  $\mathbb{R}^3$  を生成するかどうか調べよ。

(1)  $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$                       (2)  $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

(3)  $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(4)  $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

要綱では解析の過程と証明の両方を述べたが、ここでは証明のみ述べる。解析は各自すること。

(1)  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  を  $\mathbb{R}^2$  の任意のベクトルとする。 $a_1 = \frac{2y-x}{3}, a_2 = \frac{2x-y}{3}$  とおくと

$$\begin{aligned} a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2 &= \frac{2y-x}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2x-y}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{x} \end{aligned}$$

なので  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  は  $\mathbb{R}^2$  を生成する。

(2) 背理法で示す。 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  が  $\mathbb{R}^2$  を生成すると仮定する。このとき  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  に対し

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x} = a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2 = a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

となる実数  $a_1, a_2$  が存在する。このとき

$$2 = 2a_1 + 4a_2 = \frac{2}{3}(3a_1 + 6a_2) = \frac{2}{3} \cdot 0 = 0$$

となり、 $2 = 0$  となるが、これは矛盾。よって  $\mathbb{R}^2$  を生成しない。

(3)  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  を  $\mathbb{R}^3$  の任意のベクトルとする。  $a_1 = y - z, a_2 = y - x, a_3 = x + z - y$  とおくと

$$\begin{aligned} a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2 + a_3 \mathbf{x}_3 &= (y - z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (y - x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x + z - y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (y - z) + (x + z - y) \\ (y - z) + (y - x) + (x + z - y) \\ (y - x) + (x + z - y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{x} \end{aligned}$$

となる。よって  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  は  $\mathbb{R}^3$  を生成する。

(4) 背理法で示す。  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  が  $\mathbb{R}^3$  を生成すると仮定する。  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  に対し

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x} = a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2 + a_3 \mathbf{x}_3 = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

を満たす実数  $a_1, a_2, a_3$  が存在する。このとき

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1 \tag{1}$$

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \tag{2}$$

$$a_1 + 3a_2 + 5a_3 = 0 \tag{3}$$

が成立する。(2) と (3) より  $a_2 = -2a_3$  が得られる。これを (1) に代入すると  $a_1 - a_3 = 1$  が、(2) に代入すると  $a_1 - a_3 = 0$  が得られる。よって  $1 = 0$  が成立するので矛盾。よって  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  は  $\mathbb{R}^3$  を生成しない。