

演習問題 2.1 次の集合を外延的表現で表せ。

- (1) 6 以下の自然数の集合
- (2) 15 以下の偶数である自然数の集合
- (3) -1 以上 3 以下の整数の集合
- (4) 3 で割り切れる 15 以下の自然数の集合
- (5) 3 で割ると余りが 1 である 15 以下の自然数の集合

- (1) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- (2) $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$
- (3) $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$
- (4) $\{3, 6, 9, 12, 15\}$
- (5) $\{1, 4, 7, 10, 13\}$

演習問題 2.2 次の集合を表せ。ただし例 2.1 (2) の形で表示せよ。

- (1) 5 の倍数となるような自然数全体の集合
- (2) 3 で割ると余りが 2 となるような自然数全体の集合
- (3) 5 で割ると余りが 3 となるような自然数全体の集合
- (4) 3 で割ると余りが 2 であり、 5 で割ると余りが 3 となるような自然数全体の集合
(ヒント：この集合の元は 15 で割ると余りがある数である。)

この問題の解説は集合の包含関係なども既知として説明してある。

- (1) 「 $\{5k \mid k \in \mathbb{N}\}$ 」とのみ書いてある解答も間違いとはいえないが、ここは集合の記号に慣れることが目的なので、詳しく(しつこく)解答しておく。自然数 n を p で割った余りが r というのは講義で説明したように

$$\exists q \in \mathbb{Z} \quad n = pq + r \quad (0 \leq r < p)$$

である。

5 の倍数となるような自然数全体の集合を B と書くと $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ は } 5 \text{ で割り切れる}\}$ となるが、前の注意を用いると

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \ n = 5k\}$$

とも書ける。

$A = \{5k \mid k \in \mathbb{N}\}$ とするとき $A = B$ であることを示せばよい。

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

なので $A \subseteq B$ かつ $B \subseteq A$ を示す。最初に $A \subseteq B$ を示す。

$$A \subseteq B \iff (\forall a \ a \in A \implies a \in B)$$

なので $a \in A$ となる任意の a をとる。このときある自然数 k が存在して $a = 5k$ と書ける。 $5k$ は自然数(自然数 \times 自然数は自然数である)なので $a \in \mathbb{N}$ である。また $a = 5k (k \in \mathbb{N})$ なので $k \in \mathbb{Z}$ である。よって $a \in B$ となる。よって $A \subseteq B$ が成立する。

次に $B \subseteq A$ を示す。 a を B の任意の元とする。 a は 5 で割り切れる自然数なのである整数 k が存在して $a = 5k$ と書ける。ここで $k \leq 0$ とすると $a = 5k \leq 0$ となり自然数であることに矛盾、よって $k > 0$ である。 k は整数なので $k \in \mathbb{N}$ となり、 $a \in A$ となる。よって $B \subseteq A$ が成立する。

(2) 結論は $A = \{3k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ である。 $A = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ は間違い。これでは 2 が A に含まれない。この表示では余りが直接は見にくいので $A = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{N} \text{ または } k = 0\}$ という書き方もできる。

$A = \{3k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{Z} x = 3k + 2\}$ とおくと $A = B$ を示す。

最初に $A \subseteq B$ を示す。 a を A の任意の元とすると、ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して $a = 3k - 1 = 3(k - 1) + 2$ と書ける。ここで $k - 1 \in \mathbb{Z}$ であることに注意しておく。また $k \geq 1$ より $3k - 1 \geq 2 > 0$ となるので、 a は自然数である。よって $a \in B$ となり、 $A \subseteq B$ が成立する。

次に $B \subseteq A$ を示す。 a を B の任意の元とすると、ある整数 k が存在して、 $a = 3k + 2$ となる。ここで $k < 0$ とすると $k \leq -1$ なので $a = 3k + 2 \leq -3 + 2 = -1 < 0$ となる。これは a が自然数であることに矛盾するので、 $k \geq 0$ である。よって $j = k + 1$ とおくと $j \in \mathbb{N}$ であり、 $a = 3k + 2 = 3(j - 1) + 2 = 3j - 1$ となる。よって $a \in A$ となり、 $B \subseteq A$ が示された。以上により $A = B$ が成立する。

(3) 結論は $A = \{5k - 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ である。

$A = \{5k - 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{Z} x = 5k + 3\}$ とおくと $A = B$ を示す。

最初に $A \subseteq B$ を示す。 a を A の任意の元とすると、ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して $a = 5k - 2 = 5(k - 1) + 3$ と書ける。ここで $k - 1 \in \mathbb{Z}$ であることに注意しておく。また $k \geq 1$ より $5k - 2 \geq 3 > 0$ となるので、 a は自然数である。よって $a \in B$ となり、 $A \subseteq B$ が成立する。

次に $B \subseteq A$ を示す。 a を B の任意の元とすると、 a は 5 で割ると余り 3 なので、ある整数 k_0 が存在して、 $a = 5k_0 + 3$ となる。ここで $k_0 < 0$ とすると $k_0 \leq -1$ なので $a = 5k_0 + 3 \leq -5 + 3 = -2 < 0$ となる。これは a が自然数であることに矛盾するので、 $k_0 \geq 0$ である。よって $k = k_0 + 1$ とおくと $k \in \mathbb{N}$ であり、 $a = 5k_0 + 3 = 5(k - 1) + 3 = 5k - 2$ となる。よって $a \in A$ となり、 $B \subseteq A$ が示された。以上により $A = B$ が成立する。

(4) 3 で割ると余りが 2 である集合と 5 で割ると余りが 3 である集合の共通部分を少し調べてみると、15 で割ると 8 余る集合になっていることが予想される。

$A = \{15k - 7 \mid k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k_1 \in \mathbb{Z} x = 3k_1 + 2, \exists k_2 \in \mathbb{Z} x = 5k_2 + 3\}$ とするとき $A = B$ を示す。最初に $A \subseteq B$ を示す。 a を A の任意の元とする。 $a = 15k - 7 (k \in \mathbb{N})$ と書かれているので、 $a = 3(5k - 3) + 2$ と書き直すことができる。ここで $5k - 3 \in \mathbb{Z}$ である。また $a = 5(3k - 2) + 3$ と書ける。ここで $3k - 2 \in \mathbb{Z}$ である。また $k \geq 1$ より $a = 15k - 7 \geq 8 > 0$ なので a は自然数である。以上により $a \in B$ が示される。よって $A \subseteq B$ が成立する。

次に $B \subseteq A$ を示す。 a を B の任意の元とする。3 で割ると余りが 2 なので、ある整数 k_1 が存在して $a = 3k_1 + 2$ と書ける。5 で割ると余りが 3 なのである整数 k_2 が存在して $a = 5k_2 + 3$ と書ける。 $5k_2 + 3 = 3k_1 + 2$ なので $5k_2 + 1 = 3k_1$ となっている。 k_2 を 3 で割った余りを r とすると、ある整数 k_3 が存在して $k_2 = 3k_3 + r$ と書ける。 $r = 0$ または 1 または 2 である。このとき $5(3k_3 + r) + 1 = 15k_3 + 5r + 1 = 3k_1$ は 3 で割り切れる。 $r = 0$ のときこの数を 3 で割った余りが 1 になるので、 $r \neq 0$ である。また $r = 2$ のときこの数を 3 で割った余りは 2 になるので $r \neq 2$ である。 $r = 1$ のときは 3 で割り切れるので $r = 1$ であることが分かる。よって $k_2 = 3k_3 + 1$ と書くことができる。

$$a = 5k_2 + 3 = 5(3k_3 + 1) + 3 = 15k_3 + 8 = 15(k_3 + 1) - 7$$

となる。 $k = k_3 + 1$ とおく。 $k_3 < 0$ のとき $k_3 \leq -1$ なので

$$a = 15k_3 + 8 < -15 + 8 = -7 < 0$$

となり a が自然数であることに矛盾, よって $k_3 \geq 0$ である。このとき $k \in \mathbb{N}$ となる。よって $a \in A$ であり, $B \subseteq A$ が成立する。よって $A = B$ が示された。

演習問題 2.3 次の集合 A に対しその部分集合をすべて列挙せよ。

(1) $A = \{1, 2\}$

(2) $A = \{1, 2, 3\}$

(3) $A = \{1, 2, 3, 4\}$

(1) 部分集合をすべて列挙すると $A_0 = \{\}, A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}, A_3 = \{1, 2\}$ である。

(2) 部分集合をすべて列挙すると $A_1 = \{\}, A_2 = \{1\}, A_3 = \{2\}, A_4 = \{3\}, A_5 = \{1, 2\}, A_6 = \{1, 3\}, A_7 = \{2, 3\}, A_8 = \{1, 2, 3\}$ である。

(3) 部分集合をすべて列挙すると $A_1 = \{\}, A_2 = \{1\}, A_3 = \{2\}, A_4 = \{3\}, A_5 = \{4\}, A_6 = \{1, 2\}, A_7 = \{1, 3\}, A_8 = \{1, 4\}, A_9 = \{2, 3\}, A_{10} = \{2, 4\}, A_{11} = \{3, 4\}, A_{12} = \{1, 2, 3\}, A_{13} = \{1, 2, 4\}, A_{14} = \{1, 3, 4\}, A_{15} = \{2, 3, 4\}, A_{16} = \{1, 2, 3, 4\}$ である。

演習問題 2.4

(1) 例 2.3 の (2) を証明せよ。

(2) $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ ではないことを定義に基づいて証明せよ。

(3) $\mathbb{N} = \mathbb{Z}$ ではないことを定義に基づいて証明せよ。

(1) n を $\{4k \mid k \in \mathbb{N}\}$ の任意の元とすると, ある自然数 k が存在して $n = 4k$ と書ける。このとき $k_1 = 2k$ とおくと $n = 4k = 2 \cdot 2k = 2k_1$ なので $n \in \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ となっている。よって $\{4k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ が成立している。

(2) $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ の定義は \mathbb{Z} の任意の元 a が \mathbb{N} に含まれていることであった。即ち

$$\forall a \ a \in \mathbb{Z} \implies a \in \mathbb{N}$$

である。この命題の否定は

$$\exists a \ a \in \mathbb{Z} \wedge a \notin \mathbb{N}$$

である。 a として -1 をとってくると $-1 \in \mathbb{Z}$ かつ $-1 \notin \mathbb{N}$ となっているので, 否定命題が証明される。よってもとの $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ は正しくないことが示された。

(3) $\mathbb{N} = \mathbb{Z}$ の定義は $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ および $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ が共に成立することであった。(2) より $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ が成立しないので, $\mathbb{N} = \mathbb{Z}$ は成立しない。

演習問題 2.5 次の A, B, C に関し $A \cap B, A \cup B, B \cap C, B \cup C, A \cap C, A \cup C, (A \cap B) \cap C, (A \cup B) \cup C$ を求めよ。また $A \cap (B \cup C), (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C), (A \cup B) \cap (A \cup C)$ を求めよ。

(1) $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 3, 5, 6\}, C = \{1, 2, 6, 7\}$

(2) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 3\}, C = \{5, 6, 7\}$

(3) $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 3, 5\}, C = \{\}$

- (1) $A \cap B = \{1, 3\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B \cap C = \{1, 6\}$, $B \cup C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$,
 $A \cap C = \{1, 2\}$, $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$, $(A \cap B) \cap C = \{1\}$, $(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
 $A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 2, 3, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3\}$, $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1, 3\} \cup \{1, 2\} =$
 $\{1, 2, 3\}$, $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap$
 $\{1, 2, 3, 4, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
- (2) $A \cap B = \{1, 2, 3\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B \cap C = \{\}$, $B \cup C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$, $A \cap C = \{5\}$,
 $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $(A \cap B) \cap C = \{\}$, $(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
 $A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 2, 3, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 5\}$, $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1, 2, 3\} \cup$
 $\{5\} = \{1, 2, 3, 5\}$, $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $(A \cup B) \cap (A \cup C) =$
 $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- (3) $A \cap B = \{1, 3\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B \cap C = \{\}$, $B \cup C = \{1, 3, 5\}$, $A \cap C = \{\}$,
 $A \cup C = \{1, 2, 3, 4\}$, $(A \cap B) \cap C = \{\}$, $(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 $A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 3, 5\} = \{1, 3\}$, $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1, 3\} \cup \{\} = \{1, 3\}$,
 $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{\} = \{1, 2, 3, 4\}$, $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 2, 3, 4\} =$
 $\{1, 2, 3, 4\}$

演習問題 2.6 A, B, C を集合とする。

- (1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

を証明せよ。

[ヒント:] これらは、2つの集合が等しい、ということを示す問題である。2つの集合 A, B が $A = B$ である、ということの定義は、「 $A \subseteq B$ かつ $B \subseteq A$ 」ということだったので、 $A = B$ を示せ、ということとは、「 $A \subseteq B$ かつ $B \subseteq A$ 」を示せ、ということである。

$A \subseteq B$ の定義は、「 A の全ての元が B に含まれる」ということだったので、上の問題 (1) について言うならば、 $x \in A \cap (B \cup C)$ ならば $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ であることを示し、 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ならば $x \in A \cap (B \cup C)$ であることを示せば良い、ということになる。

- (1) 最初に $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ を示す。 x を $A \cap (B \cup C)$ の任意の元とする。このとき

$$x \in A \quad \wedge \quad x \in B \cup C$$

が成立している。これは

$$x \in A \quad \wedge \quad (x \in B \vee x \in C)$$

と同値である。論理のところ学んだように命題 P, Q, R に対し $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ が成立する。よって上の命題は

$$(x \in A \wedge x \in B) \quad \vee \quad (x \in A \wedge x \in C)$$

と同値である。 $x \in A \wedge x \in B$ は $x \in A \cap B$ と同値であり、 $x \in A \wedge x \in C$ は $x \in A \cap C$ と同値なので

$$x \in A \cap B \vee x \in A \cap C$$

と同値である。よって

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

が成立することが分かり、 $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ が成立する。

逆に $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ならば $x \in A \cap (B \cup C)$ であることを示す。 x を $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ の任意の元とする。このとき

$$x \in A \cap B \quad \vee \quad x \in A \cap C$$

が成立している。上と同様に同値な命題で変形していくと順に

$$(x \in A \wedge x \in B) \quad \vee \quad (x \in A \wedge x \in C)$$

$$x \in A \quad \wedge \quad (x \in B \vee x \in C)$$

$$x \in A \quad \wedge \quad x \in B \cup C$$

となるので $x \in A \cap (B \cup C)$ が成立する。以上により $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ の成立が示される。

別の述べ方：任意の x に対し次が成立する。

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \wedge x \in B \cup C \\ &\iff x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ &\iff (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\ &\iff (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \\ &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

以上により示された。途中論理の分配法則 $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ を使用した。

(2) 任意の x に対し次が成立する。

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\iff x \in A \vee x \in B \cap C \\ &\iff x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ &\iff (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\ &\iff (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C) \\ &\iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

以上により示された。途中論理の分配法則 $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ を使用した。

演習問題 2.7 演習問題 2.5 の集合 A, B に対し $A - B, A^c, A \times B$ を求めよ。ただしここで全体集合は $X = \{1, 2, \dots, 7\}$ とする。

(1) $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 3, 5, 6\}$ なので、 $A - B = \{2, 4\}, A^c = \{5, 6, 7\}, A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (4, 6)\}$

(2) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ なので, $A - B = \{4, 5\}$, $A^c = \{6, 7\}$, $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$

(3) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ なので, $A - B = \{2, 4\}$, $A^c = \{5, 6, 7\}$, $A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5)\}$

演習問題 2.8 X を全体集合とし A と B をその部分集合とすると, 次を証明せよ。

(1) $B \subseteq A \iff B^c \supseteq A^c$

(2) De Morgan の法則

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

(1) $A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}$, $B^c = \{x \in X \mid x \notin B\}$ である。 $B \subseteq A$ が成立しているとするとき,

$$\forall x \ x \in B \implies x \in A$$

が成立している。条件の部分の対偶は $x \notin A \implies x \notin B$ なので上の命題は

$$\forall x \ x \notin A \implies x \notin B$$

と同値である。これは $A^c \subseteq B^c$ を意味している。

$B^c \supseteq A^c$ が成立しているとするとき,

$$\forall x \ x \notin A \implies x \notin B$$

が成立している。条件の部分の対偶をとると

$$\forall x \ x \in B \implies x \in A$$

となる。よって $B \subseteq A$ が成立する。

(2) 最初に $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ を示す。そのためには $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$ および $(A \cup B)^c \supseteq A^c \cap B^c$ を示せばよい。

x を $(A \cup B)^c$ の任意の元とすると

$$x \notin A \cup B$$

が成立している。 $x \in A$ とすると $x \in A \cup B$ となるので $x \notin A$ である。よって $x \in A^c$ が成立する。また $x \in B$ とすると $x \in A \cup B$ となるので $x \notin B$ である。よって $x \in B^c$ が成立する。よって $x \in A^c \cap B^c$ となる。以上で $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$ が示された。

x を $A^c \cap B^c$ の任意の元とすると

$$x \notin A \wedge x \notin B$$

が成立している。 $x \in A \cup B$ とすると $x \in A$ または $x \in B$ が成立するが, 上より共に成立しない。よって $x \notin A \cup B$ なので $x \in (A \cup B)^c$ となる。以上で $(A \cup B)^c \supseteq A^c \cap B^c$ が示された。 $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$ 及び $(A \cup B)^c \supseteq A^c \cap B^c$ が成立するので $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ が成立する。

次に $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ を示す。上で述べた様な証明もできるが、ここでは上の結果を用いる証明をすることにする。 A, B に対し $C = A^c, D = B^c$ とおき、 C, D に対し上の結果を適用する。

$$(C \cup D)^c = C^c \cap D^c$$

が成立している。この両者の補集合をとると $((C \cup D)^c)^c = C \cup D$ であることに注意すると

$$(C \cup D) = (C^c \cap D^c)^c$$

となる。 $C^c = (A^c)^c = A, D^c = (B^c)^c = B$ を用いると

$$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$$

となる。これが求めるべきものであった。