# 数学序論問題解説 #8

河野

**演習問題 3.5**　次の複素数の極形式を求めよ。また複素平面に対応する点を図示せよ。
(1) $1+i\sqrt{3}$　　(2) $-2$　　(3) $i$　　(4) $2\sqrt{3}-2i$　　(5) $1-\sqrt{3}i$

(1)　$|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$ なので

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

と書ける。$2\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)$ と表してもよい。ここで $\exp(x)=e^x$ という記法を用いた。
(2)　$|-2| = \sqrt{(-2)^2+0^2} = 2$ なので

$$-2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = 2e^{i\pi}$$

となる。
(3)　$|i| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$ なので

$$i = \cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2} = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$$

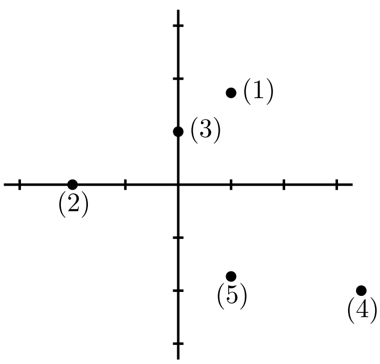
となる。
(4)　$|2\sqrt{3}-2i| = \sqrt{12+4} = 4$ なので

$$2\sqrt{3}-2i = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4\exp\left(-i\frac{\pi}{6}\right)$$

となる。偏角をマイナスで選んだが $\frac{11\pi}{6}$ としてもよい。
(5)　$|1-\sqrt{3}i| = 2$ なので

$$1-\sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\exp\left(-i\frac{\pi}{3}\right)$$

となる。偏角をマイナスで選んだが $\frac{5\pi}{3}$ としてもよい。



**演習問題 3.6**　次の問に答えよ。
(1) $e^{i\theta}$ は，原点を中心とする半径 1 の円上の点であることを示せ。
(2) オイラーの公式を用いて次の等式を導け。

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

(1)　$|e^{i\theta}| = |\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta} = \sqrt{1} = 1$ なので原点を中心とする半径 1 の円周上にある。
(2)　$\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ より

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$

となるので，

$$e^{i\theta}+e^{-i\theta} = 2\cos\theta, \quad e^{i\theta}-e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$$

となる。これから (2) の式を得る。

**演習問題 3.7**　次の問に答えよ。
(1) $(e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}$ を示せ。
(2) 系 3.6 を数学的帰納法を用いて証明せよ。

(1)

$$(e^{i\theta})^{-1} = \frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta}e^{-i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta-i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^0} = e^{-i\theta}$$

(2)　$n$ に関する数学的帰納法で証明する。$n=1$ のとき示すべき式は $(e^{i\theta})^1 = e^{i1\theta}$ なので成立している。$n=k$ のとき成立を仮定する; 即ち $(e^{i\theta})^k = e^{ik\theta}$ が成立していると仮定する。

$$(e^{i\theta})^{k+1} = (e^{i\theta})^k e^{i\theta} = e^{ik\theta}e^{i\theta} = e^{ik\theta+i\theta} = e^{i(k+1)\theta}$$

となり $n=k+1$ の成立が示された。よってすべての自然数に対し成立している。

**演習問題 3.8**　次の点を極形式で表し図示せよ。なお (3)，(4) は点 $\alpha,\beta$ を用いて作図により与えよ。
(1) $\alpha = 2+2i$　　(2) $\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}$　　(3) $\alpha\beta$　　(4) $\dfrac{\beta}{\alpha}$

(1)　$|\alpha| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$ なので

$$\alpha = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)$$

である。
(2)　$|\beta| = \sqrt{\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}} = 1$ なので

$$\beta = \cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6} = \exp\left(i\frac{\pi}{6}\right)$$

である。

(3)

$$\alpha\beta = 2\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}\exp\left(i\frac{5\pi}{12}\right)$$

(4)

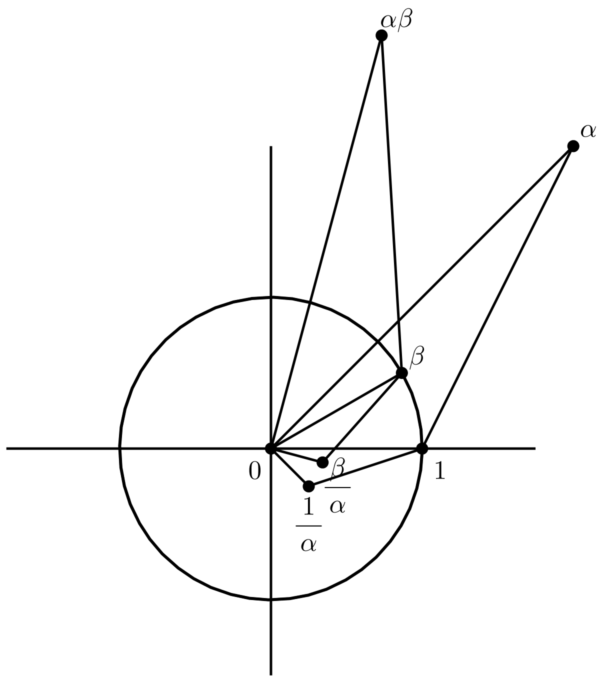
$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\alpha} &= \frac{\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right)}{2\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right)\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\exp\left(i\frac{\pi}{6}-i\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\exp\left(-i\frac{\pi}{12}\right)\end{aligned}$$

図示に関してまとめて述べる。(1) は (2) は複素数が与えられているのでそれに基づいて点を定める。例えば $\alpha = 2+2i$ は $x$ 成分が 2，$y$ 成分が 2 の点即ち通常の座標で書くと $(2,2)$ に対応する点である。$\beta$ に対応する点は $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ である。

点と複素数を同一視して点 $\alpha$ 等と書く。(3) は三角形 $01\alpha$ と相似な三角形 $o\beta P$ を辺 $0\beta$ が辺 01 に対応するように作図する。このとき得られる点 $P$ が $\alpha\beta$ に対応する。(4) は三角形 $01\alpha$ と相似な三角形 $0\beta P$ を辺 $0\beta$ が辺 $0\alpha$ に対応するように作図する。このとき得られる点 $P$ が $\frac{\beta}{\alpha}$ に対応する。

(4) は次の様に作図してもよい。まず $\frac{1}{\alpha}$ を作図する。三角形 $01\alpha$ と相似な三角形 $01P$ を辺 01 が辺 $0\alpha$ に対応するように作図する。このとき得られる点 $P$ が $\frac{1}{\alpha}$ に対応する。$\beta$ と $\frac{1}{\alpha}$ から (3) と同様に作図する。

よって図示すると次図のようになっている。




**演習問題 3.9**

(1)　1 の 4 乗根を具体的に求め，複素平面に図示せよ。

(2)　1 の 3 乗根を具体的に求め，複素平面に図示せよ。
(3)　1 の 6 乗根を具体的に求め，複素平面に図示せよ。
(4)　1 の 5 乗根を求め，複素平面に図示せよ。

(1)　1 の 4 乗根は $x^4-1=0$ の解なので

$$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=0$$

の解である。よって解は $x=1,-1,i,-i$ となる。図示すると最後の図のようになる。
(2)　1 の 3 乗根は $x^3=1$ の解なので

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$$

より $x=1$ または $x^2+x+1=0$ を満たす。$x^2+x+1=0$ のとき

$$x=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

なので $1,\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ が求めるものである。$\omega=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ とおくと $\omega^2=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ なので図の様になる。
(3)　1 の 6 乗根は $x^6=1$ の解なので

$$x^6-1=(x^3-1)(x^3+1)=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$$

より $x=1$ または $x=-1$ または $x^2+x+1=0$ または $x^2-x+1=0$ を満たす。$x^2+x+1=0$ のとき

$$x=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

であり，$x^2-x+1=0$ のとき

$$x=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

なので $1,-1,\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2},\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2},\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ が求めるものである。$\lambda=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ とおくと，$\lambda^2=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}=\omega$，$\lambda^3=-1$，$\lambda^4=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}=\omega^2$，$\lambda^5=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$，なので図の様になる。
(4)　5 乗根については「具体的に求めよ」とは書いていないので，以下のことは不要である。この場合「複 2 次式」と考えることにより求めることができるので書いておく。
　1 の 5 乗根は $x^5=1$ の解なので

$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$$

より $x=1$ または $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ を満たす。$x^4+x^3+x^2+x+1=0$ のとき両辺を $x^2$ で割ると $x^2+x+1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$ となる。$t=x+\dfrac{1}{x}$ とおくと $t^2=x^2+2+\dfrac{1}{x^2}$ なので $t$ は 2 次方程式

$$t^2+t-1=0$$

の解である。これを解くと $t=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ が得られる。$t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のとき

$$x+\frac{1}{x}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

を解くと

$$x=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},\quad x=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}-i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

が得られる。$t=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ のとき

$$x+\frac{1}{x}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

を解くと

$$x=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}+i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},\quad x=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}-i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

が得られる。よって

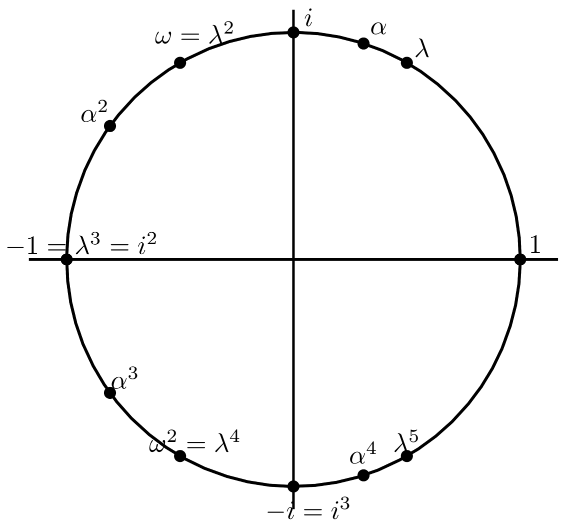
$$1,\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},\frac{-1+\sqrt{5}}{4}-i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},\frac{-1-\sqrt{5}}{4}+i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},\frac{-1-\sqrt{5}}{4}-i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

が求める解である。

$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}+i\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ とおくと

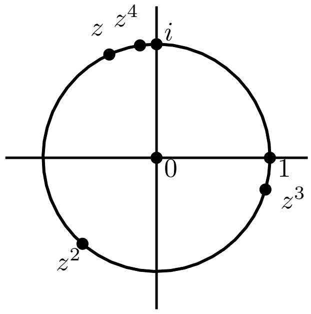
$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \frac{-1-\sqrt{5}}{4}+i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\\ \alpha^3 &= \frac{-1-\sqrt{5}}{4}-i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\\ \alpha^4 &= \frac{-1+\sqrt{5}}{4}-i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\end{aligned}$$

なので図の様になる。



**演習問題 3.10** $z = e^{2i}$ とするとき，次の問いに答えよ。
(1) $z$,$z^2$,$z^3$,$z^4$ を複素平面に図示せよ。
(2) 異なる自然数 $m, n$ に対し $z^m \neq z^n$ を示せ。ただし $\pi$ が有理数でないことは既知としてよい。

(1) $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3.14}{2} < 2 < 3.14 = \pi$ なので $z$ は図の位置にある。$z^2 = e^{4i}$ であり，$\pi = 3.14 < 4 < \dfrac{3\pi}{2}$ なので $z^2$ は図の位置にある。$z^3 = e^{6i}$ であり，$\dfrac{3\pi}{2} < 6 < 2\pi$ なので $z^3$ は図の位置にある。$z^4 = e^{8i}$ であり，$2\pi + \dfrac{\pi}{2} < 8 < 3\pi$ である。また $8 < 2 + 2\pi$ なので $z^4$ は図の位置にある。




(2) $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ なので $e^{ix} = 1$ となるのは $x = 2k\pi$ ($k$ は整数) のときであり，かつそのときに限る。

$z^m = z^n$ とすると $z^{m-n} = 1$ 即ち

$$e^{i2(m-n)} = 1$$

となる。このときある整数 $k$ が存在して $2(m-n) = 2k\pi$ となる。$m$ と $n$ が異なる自然数とすると $k \neq 0$ である。このとき $\pi = \dfrac{m-n}{k}$ より $\pi$ が有理数となり矛盾。よって異なる自然数 $m, n$ に対しては $z^m \neq z^n$ である。