数学序論問題解説 #10

河野

演習問題 4.5　命題 4.4 を証明せよ。

何度か扱っているが，一応書いておく。

最初に f が単調増加の場合を考える。f は単調増加なので

$$\forall x_1, x_2 \in I \ x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

が成立している。f が単射であるとは「$\forall x_1, x_2 \in I \ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$」が成立することを示せばよい。$x_1, x_2 \in I$ に対して $x_1 \neq x_2$ が成立しているとする。このとき「$x_1 < x_2$ または $x_2 < x_1$」が成立している。$x_1 < x_2$ のとき単調増加より $f(x_1) < f(x_2)$ が成立し，$x_2 < x_1$ のとき単調増加より $f(x_2) < f(x_1)$ が成立する。いずれの場合も $f(x_1) \neq f(x_2)$ が成立するので，f は単射である。

次に f が単調減少の場合を考える。f は単調減少なので

$$\forall x_1, x_2 \in I \ x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

が成立している。f が単射であるとは「$\forall x_1, x_2 \in I \ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$」が成立することを示せばよい。$x_1, x_2 \in I$ に対して $x_1 \neq x_2$ が成立しているとする。このとき「$x_1 < x_2$ または $x_2 < x_1$」が成立している。$x_1 < x_2$ のとき単調減少より $f(x_1) > f(x_2)$ が成立し，$x_2 < x_1$ のとき単調減少より $f(x_2) > f(x_1)$ が成立する。いずれの場合も $f(x_1) \neq f(x_2)$ が成立するので，f は単射である。

演習問題 *4.6　定理 4.6 を用いて命題 4.7 を証明せよ。

命題 4.4 より f は単射である。全射性について示す。まず (1)$I = [\,a, b\,], J = [\,\alpha, \beta\,]$ のときを示す。

(1a) f が単調増加のときを考える。このとき $f(a) = \alpha, f(b) = \beta$ である。y を J の任意の元とする。$y = \alpha$ のときは $x = a$ とおくと $f(x) = y$ が成立するので $\alpha \in f(I)$ である。$y = \beta$ のときは $x = b$ とおくと $f(x) = y$ が成立するので $\beta \in f(I)$ である。$\alpha < y < \beta$ とする。このとき

$$f(a) = \alpha < y < \beta = f(b)$$

となっている。中間値の定理より $x \in I$ で $f(x) = y$ となる元が存在する。よって $y \in f(I)$ である。以上により $f(I) = J$ が成立し，f が全射であることが示される。

(1b) f が単調減少のときを考える。このとき $f(a) = \beta, f(b) = \alpha$ である。y を J の任意の元とする。$y = \alpha$ のときは $x = b$ とおくと $f(x) = y$ が成立するので $\alpha \in f(I)$ である。$y = \beta$ のときは $x = a$ とおくと $f(x) = y$ が成立するので $\beta \in f(I)$ である。$\alpha < y < \beta$ とする。このとき

$$f(b) = \alpha < y < \beta = f(a)$$

となっている。中間値の定理より $x \in I$ で $f(x) = y$ となる元が存在する。よって $y \in f(I)$ である。以上により $f(I) = J$ が成立し，f が全射であることが示される。

次に (2)$I = (\,a, b\,), J = (\,\alpha, \beta\,)$ のときを示す。

(2a) f が単調増加のときを考える。y を J の任意の元とする。このとき $\alpha < y < \beta$ が成立している。$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x) = \alpha$ より $f(x_1) < y$ となる元 x_1 で $a < x_1 < b$ となるものが存在する。$\displaystyle\lim_{x\to b-0} f(x) = \beta$ より $y < f(x_2)$ となる元 x_2 で $a < x_2 < b$ となるものが存在する。$L = [\, x_1, x_2\,]$ に対し中間値の定理を適用すると $x \in I$ で $f(x) = y$ となる元が存在する。よって $y \in f(I)$ である。以上により $f(I) = J$ が成立し，f が全射であることが示される。
(2b) f が単調減少のときを考える。y を J の任意の元とする。このとき $\alpha < y < \beta$ が成立している。$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x) = \beta$ より $f(x_1) > y$ となる元 x_1 で $a < x_1 < b$ となるものが存在する。$\displaystyle\lim_{x\to b-0} f(x) = \alpha$ より $y > f(x_2)$ となる元 x_2 で $a < x_2 < b$ となるものが存在する。$L = [\, x_1, x_2\,]$ に対し中間値の定理を適用すると $x \in I$ で $f(x) = y$ となる元が存在する。よって $y \in f(I)$ である。以上により $f(I) = J$ が成立し，f が全射であることが示される。

演習問題 4.7　命題 4.10 を数学的帰納法で証明せよ。

　このことをきちんと証明しようとすると，自然数に対するべき乗の定義もきちんとしておく必要がある。次がべき乗のきちんとした (帰納的) 定義である。$a^1 = a$ と定義する。a^m が定義されたとき

$$a^{m+1} = a^m \times a$$

で定義する。

　最初に $a^{m+n} = a^m a^n$ を n に関する数学的帰納法で証明する。$a^1 = a$ であることを注意しておく。

$$a^{m+1} = a^m \times a = a^m\, a^1$$

より $n = 1$ のとき成立している。$n = k$ のとき成立を仮定する。即ち $a^{m+k} = a^m a^k$ を仮定する。

$$a^{m+k+1} = a^{m+k} a = \left(a^m a^k\right) a = a^m \left(a^k a\right) = a^m a^{k+1}$$

となり $n = k + 1$ でも成立している。よって示された。

　次は $(a^m)^n = a^{mn}$ を示す。$n = 1$ のときは $(a^m)^1 = a^m = a^{m\cdot 1}$ より成立している。$n = k$ のとき成立を仮定する。即ち $(a^m)^k = a^{mk}$ を仮定する。

$$(a^m)^{k+1} = (a^m)^k a^m = a^{mk} a^m = a^{mk+m} = a^{m(k+1)}$$

となり $n = k + 1$ でも成立している。よって示された。

演習問題 4.8　命題 4.12 を証明せよ。ただし自然数に対し指数法則が成立すること (命題 4.10) は用いてよい。

(1)　$a^{m+n} = a^m a^n$ を示す。最初に $m = 0$ の場合を考える。$m = 0$ のとき $a^m = a^0 = 1$ である。

$$a^0 a^n = 1a^n = a^n = a^{0+n} = a^{m+n}$$

となるので成立する。

　$n = 0$ の場合も同様に

$$a^m a^0 = a^m 1 = a^m = a^{m+0} = a^{m+n}$$

より成立する。

次に $m<0, n>0$ の場合を考える。$m=-m_1$ とおくと $m_1>0$ である。

$$a^m a^n = a^{-m_1} a^n = \frac{1}{a^{m_1}} a^n = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdots a}^{n\text{ 個}}}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m_1\text{個}}}$$

約分を実行すると，$n \geq m_1$ のときは分子に a が $n-m_1$ 個残り，$m_1 > n$ のときは分母に a が m_1-n 個残る。前者の場合 a^{n-m_1} であり，後者の場合 $\dfrac{1}{a^{m_1-n}}$ である。いずれの場合も

$$a^{n-m_1} = a^{n+m}, \quad \frac{1}{a^{m_1-n}} = \frac{1}{a^{-m-n}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}$$

となり成立が分かる。

$m>0, n<0$ の場合を考える。$n=-n_1$ とおくと $n_1>0$ である。

$$a^m a^n = a^m a^{-n_1} = a^m \frac{1}{a^{n_1}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdots a}^{m\text{ 個}}}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n_1\text{個}}}$$

約分を実行すると，$m \geq n_1$ のときは分子に a が $m-n_1$ 個残り，$n_1 > m$ のときは分母に a が n_1-m 個残る。前者の場合 a^{m-n_1} であり，後者の場合 $\dfrac{1}{a^{n_1-m}}$ である。いずれの場合も

$$a^{m-n_1} = a^{m+n} = a^{n+m}, \quad \frac{1}{a^{n_1-m}} = \frac{1}{a^{-n-m}} = \frac{1}{a^{-(n+m)}} = a^{n+m} = a^{m+n}$$

となり成立が分かる。

$m<0, n<0$ のときは $m=-m_1, n=-n_1$ とおく。

$$\begin{aligned} a^{m+n} a^{-m_1-n_1} &= a^{-(m_1+n_1)} = \left(\frac{1}{a}\right)^{m_1+n_1} = \left(\frac{1}{a}\right)^{m_1} \left(\frac{1}{a}\right)^{n_1} \\ &= a^{-m_1} a^{-n_1} = a^m a^n \end{aligned}$$

となり成立する。なお途中で命題 4.10 を使用した。

(2)　$(a^m)^n = a^{mn}$ を示す。

$m=0$ の場合を考える。$a^0=1$ より

$$(a^m)^n = \left(a^0\right)^n = 1^n = 1 = a^0 = a^{0n} = a^{mn}$$

となり成立する。

$n=0$ のとき

$$(a^m)^n = (a^m)^0 = 1 = a^0 = a^{m0} = a^{mn}$$

となる。

$m>0, n<0$ のとき $n_1=-n$ とおくと $n_1>0$ である。

$$(a^m)^n = (a^m)^{-n_1} = \frac{1}{(a^m)^{n_1}} = \frac{1}{a^{mn_1}} = a^{-(mn_1)} = a^{mn}$$

途中命題 4.10 を使用した。

$m<0, n>0$ のとき $m_1=-m$ とおくと $m_1>0$ である。

$$(a^m)^n=\left(a^{-m_1}\right)^n=\left(\frac{1}{a^{m_1}}\right)^{n_1}=\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{m_1}\right)^n=\left(\frac{1}{a}\right)^{m_1n}=a^{-(mn_1)}=a^{mn}$$

途中命題 4.10 を使用した。

$m<0, n<0$ のとき $m_1=-m, n_1=-n$ とおく。

$$(a^m)^n=\left(a^{-m_1}\right)^{-n_1}=\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{m_1}\right)^{-n_1}=\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{m_1}}\right)^{n_1}$$

$$=\left(\frac{1}{\frac{1}{a^{m_1}}}\right)^{n_1}=(a^{m_1})^{n_1}=a^{m_1n_1}=a^{(-m_1)(-n_1)}=a^ma^n$$

途中命題 4.10 を使用した。

この方法は途中「個数を数える」ことをしている。演習問題 4.7 が個数を数える方法でなく，数学的帰納法で証明しているので，同様な方法もある。ここで追加でその方法を解説する。

自然数に対するべき乗は，$k=0$ のときは $a^0=1$ であり，自然数 k に対しては a^k が定義されているとき，$a^{k+1}=a^k\cdot a$ と定義された。

同様に負の整数の場合 $a^0=1$ であり，自然数 k に対し a^{-k} が定義されているとき $a^{-(k+1)}=a^{-k}\dfrac{1}{a}$ と定義される。$k=0$ の場合を考えると，定義から $a^{-1}=\dfrac{1}{a}$ が出る。

$p=-(k+1)$ とおくと $-k=p+1$ なので

$$a^pa=a^{-k}=a^{p+1}$$

となる。即ち p が整数のとき，p が負の数でも

$$a^pa=a^{p+1}$$

が成立する。

$p=k+1$ とおくと $k=p-1$ なので

$$a^pa^{-1}=a^{p-1}$$

となる。即ち p が整数のとき，p が正の数でも

$$a^pa^{-1}=a^{p-1}$$

が成立する。

以上を準備として $a^{m+n}=a^ma^n$ の証明を始める。m は任意の整数とする。最初は $n\geq 0$ の場合。

$n=0$ のときは

$$a^{m+0}=a^m=a^m\cdot 1=a^ma^0$$

より成立している。

$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち任意の整数 m に対し $a^{m+k}=a^m a^k$ の成立を仮定する。

$$\begin{aligned}a^{m+(k+1)} &= a^{(m+k)+1} = a^{m+k}a^1 = \left(a^m a^k\right)a^1 \\ &= a^m\left(a^k a^1\right) = a^m a^{k+1}\end{aligned}$$

よって $n=k+1$ の場合も成立している。数学的帰納法により $n \geq 0$ の場合 $a^{m+n}=a^m a^n$ が成立する。

n が負の場合は $n=-n_1$ とおき，n_1 に関する数学的帰納法で示す。$n_1=0$ のときは成立している。$n=-n_1$ のとき成立を仮定する。$n-1=-(n_1+1)$ のとき

$$\begin{aligned}a^{m-(n_1+1)} &= a^{(m-n_1)-1} = a^{m-n_1}a^{-1} = \left(a^m a^{-n_1}\right)a^{-1} \\ &= a^m\left(a^{-n_1}a^{-1}\right) = a^m a^{-n_1-1} = a^m a^{-(n_1+1)}\end{aligned}$$

よって数学的帰納法によりすべての負の整数 n で $a^{m+n}=a^m a^n$ が成立することが分かる。

前の結果とあわせるとすべての整数 m,n に対し $a^{m+n}=a^m a^n$ が成立することが示された。

$(a^m)^n = a^{mn}$ を証明する。m は任意の整数とする。$a^m a^{-m} = a^{m-m} = a^0 = 1$ より $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m} = (a^m)^{-1}$ が成立する。

最初は $n \geq 0$ のとき。$(a^m)^0 = 1 = a^0 = a^{m0}$ より成立している。$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち $(a^m)^k = a^{mk}$ の成立を仮定する。

$$(a^m)^{k+1} = (a^m)^k(a^m) = \left(a^{mk}\right)a^m = a^{mk+m} = a^{m(k+1)}$$

途中 $a^{a+q}=a^p a^q$ を使用した。$n=k+1$ でも成立するので数学的帰納法によりすべての 0 以上の整数で成立する。

$n=-k$ で成立を仮定する。

$$\begin{aligned}(a^m)^{-(k+1)} &= (a^m)^{-k-1} = (a^m)^{-k}(a^m)^{-1} = \left(a^{-mk}\right)a^{-m} \\ &= a^{-mk-m} = a^{m(-(k+1))}\end{aligned}$$

よって $k+1$ でも成立し証明が完成する。

演習問題 ***4.9**　命題 4.13 を証明せよ。

(1) を証明し，それを用いて (2) を証明する。

$a>1$ とする。$a=1+h$ とおくと $h>0$ である。二項定理より自然数 n に対し

$$a^n = (1+h)^n = 1 + nh + {}_nC_{n-1}h^2 + \cdot + {}_nC_k h^k + \cdots + h^n$$

が成立している。上式右辺の 3 項以降は正なので

$$(1+h)^n > 1 + nh$$

が成立する。よって

$$\lim_{n\to\infty}(1+nh) = \infty$$

が成立するが，$a^n > 1+nh$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$ が得られる。

$n < 0$ のとき $n = -m$ とおくと

$$a^n = a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

となる。$a^m > 1 + mh$ より $\dfrac{1}{a^m} < \dfrac{1}{1+mh}$ が成立している。

$$0 < a^n = \frac{1}{a^m} < \frac{1}{1+mh}$$

であり，$n \to -\infty$ のとき $m \to \infty$ となる。$\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{1}{1+mh} = 0$ より

$$\lim_{n\to-\infty} a^n = 0$$

が得られる。

$0 < a < 1$ のとき $b = \dfrac{1}{a}$ とおくと $b > 1$ である。すでに示したことから

$$\lim_{n\to\infty} b^n = \infty, \qquad \lim_{n\to-\infty} b^n = 0$$

が成立する。$a^n = \dfrac{1}{b^n}$ より (1) が得られる。

演習問題 ***4.10**　a は正の実数とする。

(1)　n を自然数とする。$b^n = a$ を満たすような正の実数 b はただ一つしかないことを証明せよ。

(2)　p, q が 0 ではない整数の時，$\left(a^{1/q}\right)^p = (a^p)^{1/q}$ を示せ.

(3)　$p,\ q,\ s,\ t$ が 0 ではない整数であって $p/q = s/t$ となっている時，$\left(a^{1/q}\right)^p = \left(a^{1/t}\right)^s$ となることを示せ。

(4)　任意の有理数 u, v に対して，次が成り立つことを示せ。

$$a^{u+v} = a^u a^v, \qquad (a^u)^v = a^{uv}$$

(5)　任意の有理数 u に対して $a^u > 0$ を示せ。

(6)　$1 < a$ の時，有理数 u, v が $u < v$ ならば $a^u < a^v$ を示せ。

(7)　$0 < a < 1$ の時，有理数 u, v が $u < v$ ならば $a^u > a^v$ を示せ。

(1)　$f : [\,0, \infty\,) \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^n$ で定義すると f は単調増加であり，よって単射である。$b_1^n = a = b_2^n$ となる正の実数 b_1, b_2 が存在したとすると，$f(b_1) = a = f(b_2)$ が成立している。f は単射なので $b_1 = b_2$ となる。

(2)　(1) の結果より自然数 n に対し「$b^n = a \iff b = a^{\frac{1}{n}}$」が分かる。ここで最初に 0 でない整数 p に対し「$b^p = a \iff b = a^{\frac{1}{p}}$」の成立を示しておく。$p > 0$ の場合は (1) で示したので $p < 0$ とする。$p = -k$ とおくと k は自然数である。$b^p = b^{-k} = \left(\dfrac{1}{b}\right)^k$ なので (1) より「$b^p = a \iff \left(\dfrac{1}{b}\right)^k = a \iff \dfrac{1}{b} = a^{\frac{1}{k}}$」が成立するが $b = \dfrac{1}{a^{\frac{1}{k}}} = a^{-\frac{1}{k}} = a^{\frac{1}{-k}} = a^{\frac{1}{n}}$ となり成立する。

$b = a^{\frac{1}{q}}$ とおくと $a = b^q$ が成立している。

$$a^p = \left(b^q\right)^p = b^{qp} = b^{pq} = \left(b^p\right)^q$$

より

$$\left(a^p\right)^{\frac{1}{q}} = b^p = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

が成立している。

(3)　$b = a^{\frac{1}{q}}$，$c = a^{\frac{1}{t}}$ とおくと $a = b^q$，$a = c^t$ が成立している。

$$a^p = \left(b^q\right)^p = b^{qp} = b^{pq} = \left(b^p\right)^q$$

であり，$tp = sq$ より

$$a^p = \left(c^t\right)^p = c^{tp} = c^{sq} = \left(c^s\right)^q$$

が成立している。$\left(b^p\right)^q = \left(c^s\right)^q$ なので (1) より $b^p = c^s$ が成立する。これを a を用いて書き直せば $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(a^{\frac{1}{t}}\right)^s$ が得られる。

(4)　$u = 0$ または $v = 0$ の場合は整数のとき示したのと同様に示すことができる。よって u, v は 0 でない有理数とする。(3) は有理数に対し，その分数の表示にかかわらず指数関数が決まることを意味している。即ち $u = \dfrac{p}{q}$ と表示しようと，$u = \dfrac{s}{t}$ と表示しようと，その表示によらない値として $a^u = a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{s}{t}}$ が決まることを意味している。よって最初の等式を証明するために分数表示はすでに通分されているとする；即ち $u = \dfrac{p_1}{q}$，$v = \dfrac{p_2}{q}$ (p_1, p_2, q は 0 でない整数) とする。このとき整数が指数の場合の指数法則は示されている。よって

$$\begin{aligned}
a^u a^v &= a^{\frac{p_1}{q}} a^{\frac{p_2}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p_1} \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p_2} \\
&= \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p_1 + p_2} = a^{\frac{p_1 + p_2}{q}} \\
&= a^{\frac{p_1}{q} + \frac{p_2}{q}} = a^{u+v}
\end{aligned}$$

となる。

次の式を示すために最初に

$$\left(a^{\frac{1}{q_1}}\right)^{\frac{1}{q_2}} = a^{\frac{1}{q_1 q_2}}$$

を示す。ただし q_1, q_2 は 0 でない整数とする。$b = \left(a^{\frac{1}{q_1}}\right)^{\frac{1}{q_2}}$ とおくと $b^{q_2} = a^{\frac{1}{q_1}}$ である。さらに q_1 乗すると

$$a = \left(b^{q_2}\right)^{q_1} = b^{q_2 q_1} = b^{q_1 q_2}$$

となるので (2) の最初に注意より $b = a^{\frac{1}{q_1 q_2}}$ となる。

次に

$$\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(a^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

を示す。$b = a^{\frac{1}{q}}$ とおくと $a = b^q$ である。これを p 乗すると

$$a^p = \left(b^q\right)^p = b^{qp} = b^{pq} = \left(b^p\right)^q$$

となるので

$$\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = b^p = \left(a^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

となる。

$u=\dfrac{p}{q},\ v=\dfrac{s}{t}$ とおくと

$$\begin{aligned}(a^u)^v &= \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{s}{t}} = \left(\left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p\right)^{\frac{1}{t}}\right)^s \\ &= \left(\left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{t}}\right)^p\right)^s = \left(a^{\frac{1}{qt}}\right)^{ps} \\ &= a^{\frac{ps}{qt}} = a^{uv}\end{aligned}$$

が得られる。

(5)　有理数 u は $u=\dfrac{p}{q}$ と分数表示できる。ここで q は正の整数，p は整数である。$a>0$ は常に仮定されているので $a^{\frac{1}{q}}>0$ である。これを p 乗した $a^u=\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$ も正である。

(6)　最初に正の整数 q に対し $a^{\frac{1}{q}}>1$ を背理法で示す。$a^{\frac{1}{q}}>0$ なので結論を否定すると

$$0<a^{\frac{1}{q}}\leq 1$$

が成立している。q は正の整数なので q 乗しても不等号の向きは変わらない。よって

$$0<\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q\leq 1^q=1$$

となるのが $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q=a$ なので $a\leq 1$ となり矛盾。

次に正の有理数 $u=\dfrac{p}{q}$ に対し $a^u>1$ を示す。ここで p,q は正の整数とする。$a^{\frac{1}{q}}>1$ なので $a^u=\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p>1$ となり成立する。

$u<v$ とすると $v-u>0$ なので今示したことより $a^{v-u}>1$ となるが $a^{v-u}=a^ua^{-v}$ であり両辺に a^u をかけると $a^v>a^u$ が得られる。

(7)　$0<a<1$ のとき $b=\dfrac{1}{a}$ とおくと $b>1$ が成立している。$u<v$ のとき (6) より $b^u<b^v$ が，即ち

$$\left(\frac{1}{a}\right)^u<\left(\frac{1}{a}\right)^v$$

が成立している。両辺に a^{v+u} をかけると

$$a^v<a^u$$

が得られる。